ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Кафедра медицинской физики с курсом информатики

МЕТОДИЧЕСКАЯ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ
к практическим занятиям

Дисциплина Математическое моделирование в биологии

Специальность 30.05.02 - Медицинская биофизика

Курс 2

Семестр III

Уфа

Рецензенты:

1. Главный врач

ГБУЗ Республиканский кардиологический центр, к.м.н. И.Е. Николаева

2. Зав. кафедрой общей физики

Уфимского университета науки и технологий,

д.ф.-м.н., профессор М. Х.Балапанов

Автор: доцент Аксенова З.Ф.

Утверждена на заседании № 10 кафедры медицинской физики с курсом информатики, от «18» апреля 2023 г.

Темы:

1. Понятие модели. Примеры моделей. Типы моделей. Классификация математических моделей. Примеры имитационных моделей. Специфика моделей живых систем.
2. Стационарное состояние (точка покоя, особая точка, состояние равновесия). Устойчивость состояния равновесия. Аналитический метод исследования устойчивости стационарного состояния (метод Ляпунова). Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния. Логистическое уравнение. Применение дифференциальных уравнений в биологии.
3. Уравнение экспоненциального роста. Ограниченный рост. Модель популяции с наименьшей критической численностью. Дискретные модели популяций. Уравнение с запаздыванием.
4. Фазовая плоскость. Метод изоклин. Устойчивость стационарного состояния. Линейные системы. Исследование устойчивости стационарных состояний нелинейных систем второго порядка. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стационарного состояния. Возможные задачи модельного исследования.

1.Тема занятия № 1 и eè актуальность. Понятие модели. Примеры моделей. Типы моделей. Классификация математических моделей. Примеры имитационных моделей. Специфика моделей живых систем.

Математические и компьютерные методы занимают важное место в современных биологических исследованиях. Без них было бы невозможным выполнение таких глобальных проектов, как геном человека, расшифровка пространственной структуры сложных биомакромолекул, дистанционная диагностика, компьютерное моделирование новых эффективных лекарств («драг-дизайн»), планирование мероприятий по предотвращению распространения эпидемий, анализ экологических последствий работы промышленных объектов, биотехнологические производства и многое другое.

2. Учебные цели:

Овладение базовыми понятиями математического моделирования.
Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен
Знать: базовые понятия математического моделирования, цель математического моделирования.

Уметь: решать прикладные задачи вычислительного и теоретического характера.

Владеть: методами математического моделирования на примере простейших биологических систем.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. Понятие модели.
2. Примеры моделей.
3. Типы моделей.
4. Классификация математических моделей.
5. Примеры имитационных моделей.
6. Специфика моделей живых систем.
7. Современная классификация моделей биологических процессов. Регрессионные, имитационные, качественные модели.

4. Вид занятия: практическое занятие.
5. Продолжительность занятия: 3 часа
На изучение указанной выше темы, отведено 12 академических часов по рабочей программе дисциплины «Математическое моделирование в биологии»направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения $dy/dx=x$

1.$y=x+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$y=x^3/3+c$; 4.$y=-x+c$

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при $x=1$, $y=0$

1.$y=x^2+1$; 2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$; 4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка

1.ydy-xdx=0; 2.xdy-ydx=xdx; 3.xdy=(y+3x^2)dx;
4.dy=x^2dx 4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка

1.dy-xdx=0; 2.xdy-ydx=ydy; 3.xdy-ydx=x^3dx; 4.4dy-x^3dx=0

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=2x-1/x

1.y=x^2+x+c; 2.y=2x-lnx+c; 3.y=x^2+lnx+c; 4.y=x^{2-}lnx+c

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения y``=2x+1

1.y=x^2+x+c; 2.y=x^3+c_1x+c_2; 3.y=x^3/3+x^2/2+c_1x+c_2; 4.x^3+$c_1$$x^2$+$c_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения dy/y^2=xdx имеет вид

1.-1/y=x^2/2+c; 2.y=x^2/2+c; 3.1/y=x^2/2+c;
4.-1/y=x^2+c Ответы на тесты:
1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия. Модель «хищник жертва»

Фазовый портрет автономной линейной системы второго порядка

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}. \qquad (1)$$

Положение равновесие:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Если $ad - bc \neq 0$,точка (0;0) - единственная точка покоя системы.
Фазовые траектории определяются из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \qquad (2)$$

Преобразуем последнее уравнение при помощи линейной неособенной подстановки

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases}, \text{ причем } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \qquad (3)$$

так, чтобы в новых переменных система имела наиболее простой вид.
Из аналитической геометрии известно, что вид уравнения (2) в новых переменных зависит от корней ***характеристического уравнения*** системы (1), т.е.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Корни (4) называются ***собственными числами*** системы (1).

Анри Пуанкаре показал, что возможны следующие случаи, каждому из которых отвечает свое расположение фазовых кривых в окрестности точки покоя.

I. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Система (1) приводится к виду

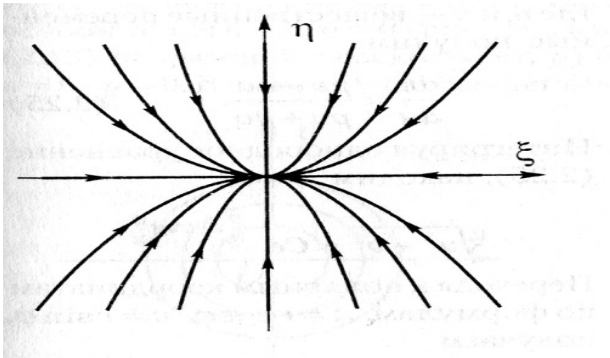
$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi} \qquad (5)$$

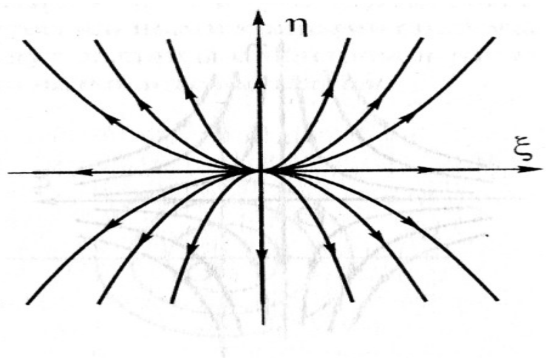
Различают четыре случая.

1) λ_1, λ_2 - вещественные одного знака.

Точка покоя $\xi=0, \eta=0$ называется ***узлом.***

Вид фазовых траекторий:





устойчивый узел $\lambda_1<\lambda_2<0$

неустойчивый узел $\lambda_1>\lambda_2>0$

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y \end{cases}$$

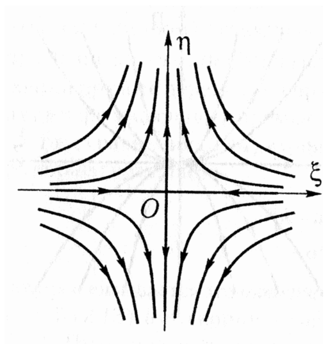
Характеристическое уравнение (4) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(1-\lambda)=0$$

имеет корни $\lambda_1=3, \lambda_2=1$. Точка покоя – неустойчивый ***узел***.

2) λ_1, λ_2 - вещественные и противоположных знаков.

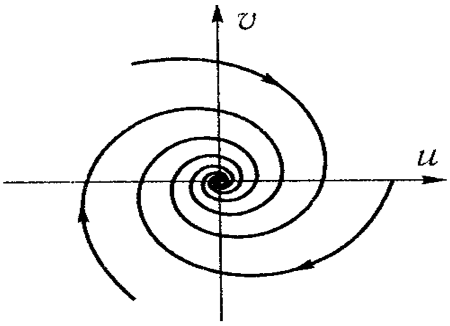
Точка покоя - ***седло*** **(неустойчивая точка покоя).**

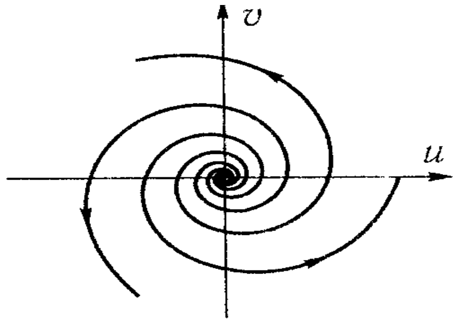


3) λ_1, λ_2 - комплексно сопряженные: $\lambda_1=p+iq$, $\lambda_2=p-iq$, $(q\neq0)$. Выделяем вещественные и мнимые части:

$$\begin{cases} \xi=u+iv, \\ \eta=u-iv \end{cases}.$$

Точка покоя $u=0, v=0$ - ***фокус.***





устойчивый фокус неустойчивый фокус

$p<0$ $p>0$

Пример.

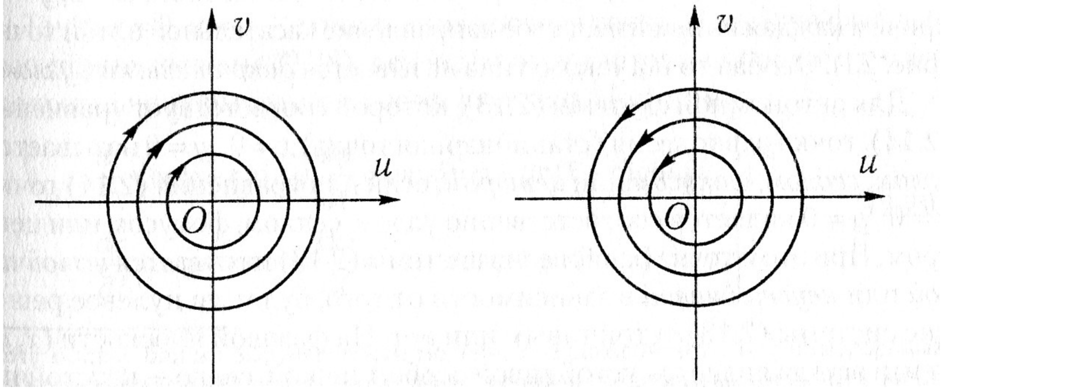
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x-2y, \\ \frac{dy}{dt}=4x-y \end{cases}$$

Характеристическое уравнение (4) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(-1-\lambda)+8=\lambda^2-2\lambda+5=0.$$

имеет дискриминант $D=4-20=-16$, откуда $\lambda_{1,2}=\frac{2\pm4i}{2}=1\pm2i$. Точка покоя – неустойчивый узел.

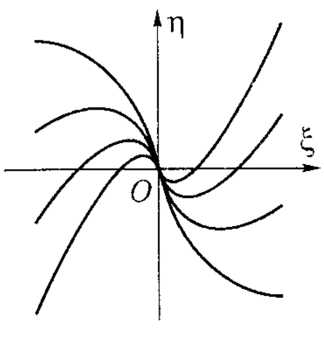
4) λ_1, λ_2 - чисто мнимые: $\lambda_1=\text{iq}$, $\lambda_2=-\text{iq}$. Тогда фазовые траектории – окружности. Точка покоя – ***центр*** **(устойчивая точка покоя)**



II. Корни характеристического уравнения кратные.

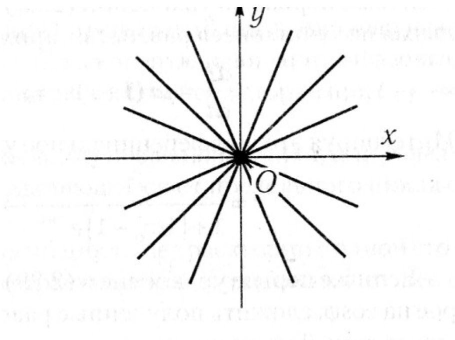
1) Кратные корни не равные нулю, причем $\text{rang}(A-\lambda_1 E)=1$.

Точка покоя - ***вырожденный узел***.



2) Кратные корни не равные нулю, причем $\text{rang}(A-\lambda_1 E)=0$.

Точка покоя – ***дикритический узел***.



Взаимодействие двух видов.

Непосредственное взаимодействие между двумя видами удобно разбить на три категории.

1. Конкуренция ¿: каждый из видов оказывает подавляющее действие на рост другого вида.
2. Комменсализм (симбиоз) ¿: каждый из видов ускоряет рост другого вида.
3. Хищничество ¿: один вид («хищник») подавляет рост другого вида («жертва»), жертва ускоряет рост хищника.

Рассмотрим третий вид взаимодействия.

Система «хищник – жертва».

Допущения:

1. Среда однородная.
2. Численность данного вида описывается одной переменной, т.е. мы пренебрегаем возрастными, половыми и генетическими различиями.
3. Пренебрегаем случайными флуктуациями.
4. Взаимодействие мгновенное.

В биологической литературе существует огромное число работ, в которых подобные системы либо наблюдались в природе, либо моделировались на «модельных» популяциях в лабораторных условиях.

Однако их результаты зачастую *противоречат* друг другу:

- в одних экспериментах наблюдались, на первый взгляд, непонятные явления периодических изменений численности популяций в однородной среде;
- в других наблюдениях системы достаточно быстро разрушались: либо гибнет хищник, а жертва останется, либо гибнет жертва, а вслед за ней хищник.

Построенная в 20-х годах XX века Вито Вольтера модель сообщества «хищник-жертва» объясняет многие из этих особенностей. Это первый успех математической экологии. При рассмотрении этой системы рассмотрим вопросы устойчивости: условия устойчивости и механизмы устойчивости.

Классическая модель Вольтерра

Пусть

$N_1 = N_1(t)$ - численность жертвы,

$N_2 = N_2(t)$ - численность хищников.

Дополнительные допущения.

1. Единственным лимитирующим фактором, ограничивающим размножение жертв, является давление на них со стороны хищников. Ограниченность ресурсов среды для жертвы не учитывается.

2. Размножение хищников ограничивается количеством добытой им пищи (количеством жертв).

r − коэффициент естественного прироста жертвы;

m − коэффициент естественной смертности хищника;

$V = V(N_1)$ − количество (биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени (трофическая функция);

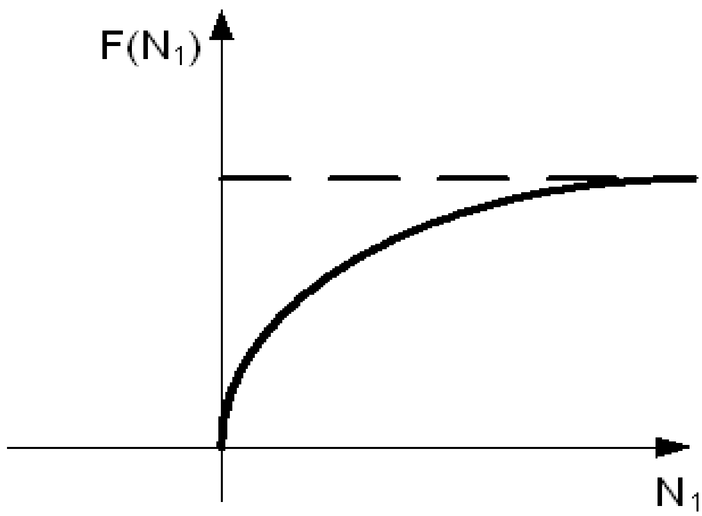
k − часть полученной с биомассы $V(N_1)$энергии, которая расходуется хищником на воспроизводство. Остальная энергии тратится на поддержание основного обмена и охотничьей активности.

Уравнения системы «хищник-жертва»

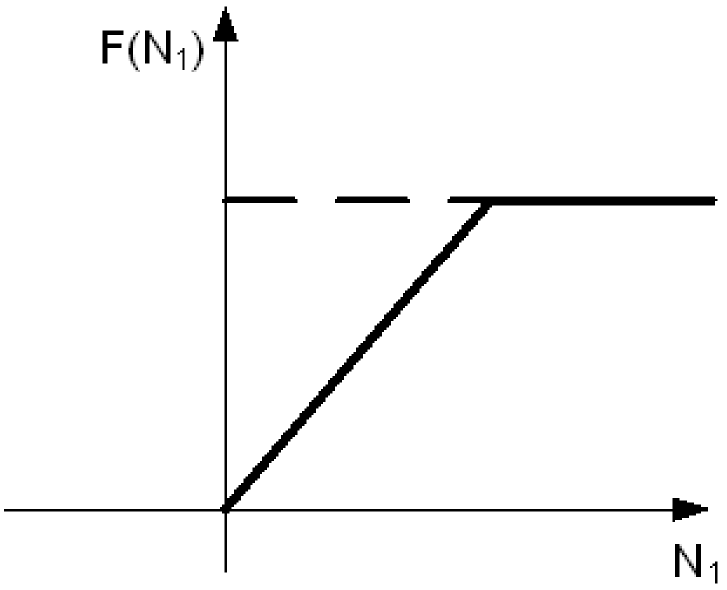
$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 - V(N_1) \cdot N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -mN_2 + kV(N_1) \cdot N_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Функция $V(N_1)$ определяется в экспериментальных работах. К настоящему времени установлено, что эти функции принадлежат к одному из следующих трех типов.

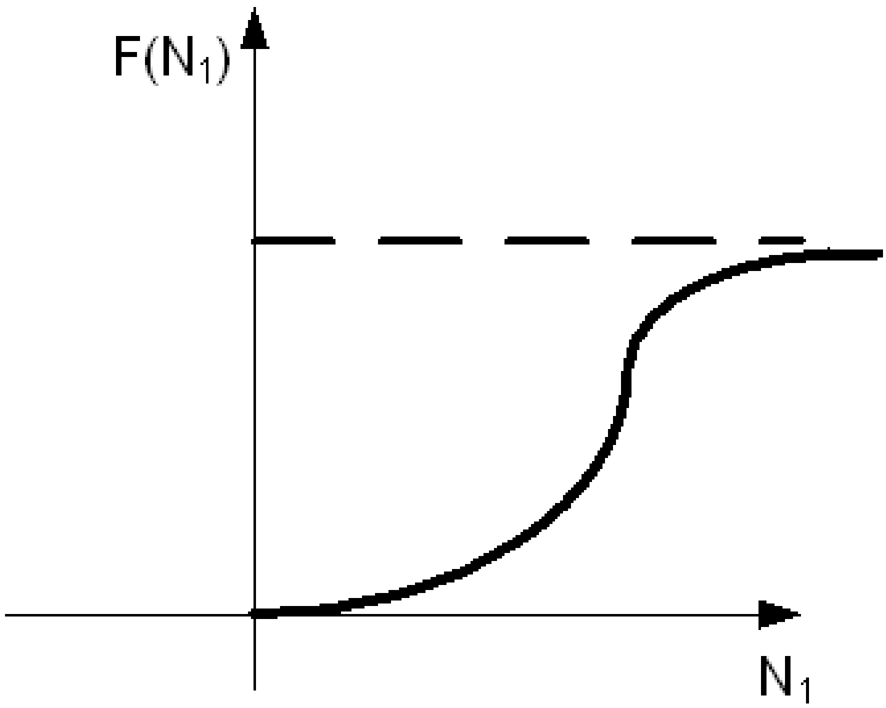
1) Этот тип характерен для беспозвоночных и некоторых видов хищных рыб.



2) Трофическая функция с резко выраженным порогом насыщения характерна для хищников - фильтраторов (моллюсков).



3) Данный тип характерен для позвоночных – организмов, способных к обучению.



При малых значениях численности жертвы почти все жертвы становятся добычей хищника, который всегда голоден и насыщения не наступает. Трофическую функцию можно считать линейной:

$V(N_1) = c \cdot N_1$

Классическая модель Вольтерра:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r N_1 - c N_1 N_2 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -m N_2 + k c N_1 N_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Начальные условия

$$N_1(0) = N_1^0 \qquad (3)$$

$N_2(0)=N_2^0$

Система (2) является автономной, т.к. не имеет t в правой части. Изменение состояния системы изображается на фазовой плоскости и является решением уравнения

$$\frac{dN_2}{dN_1}=\frac{-mN_2+kcN_1N_2}{rN_1-cN_1N_2}$$

Найдем точки покоя системы (2).

$$\begin{cases} N_1(r-cN_2)=0 \\ N_2(-m+kcN_1)=0 \end{cases} \qquad (4)$$

Нетривиальная точка покоя системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} N_{2^*}=\dfrac{r}{c} \\ N_{1^*}=\dfrac{m}{kc} \end{cases} \qquad (5)$$

Определим характер точки покоя (5).

Сделаем замену

$$\begin{cases} x=N_1-N_{1^*} \\ y=N_2-N_{2^*} \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} N_1=x+\dfrac{m}{kc} \\ N_2=y+\dfrac{r}{c} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=r\left(x+\dfrac{m}{kc}\right)-c\left(x+\dfrac{m}{kc}\right)\left(y+\dfrac{r}{c}\right) \\ \dfrac{dy}{dt}=-m\left(y+\dfrac{r}{c}\right)+kc\left(x+\dfrac{m}{kc}\right)\left(y+\dfrac{r}{c}\right) \end{cases}$$

Раскроем скобки и получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-m}{k}y-cxy \\ \dfrac{dy}{dt}=krx+kcxy \end{cases}$$

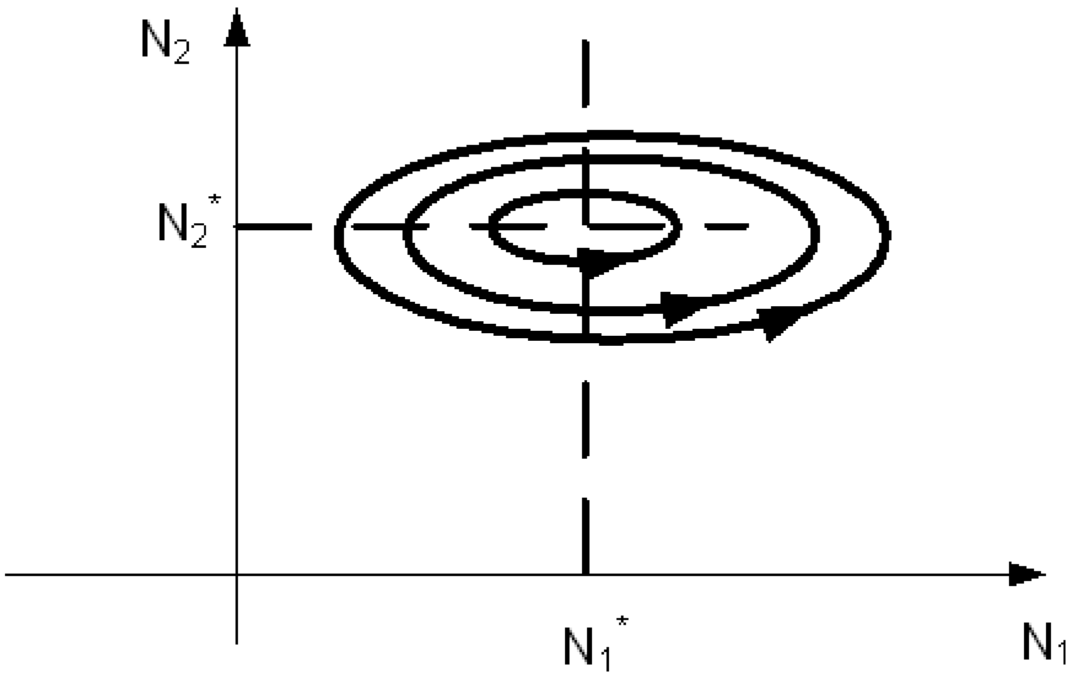
Отбросив нелинейные члены, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-m}{k}y \\ \dfrac{dy}{dt}=krx \end{cases} \qquad (6)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

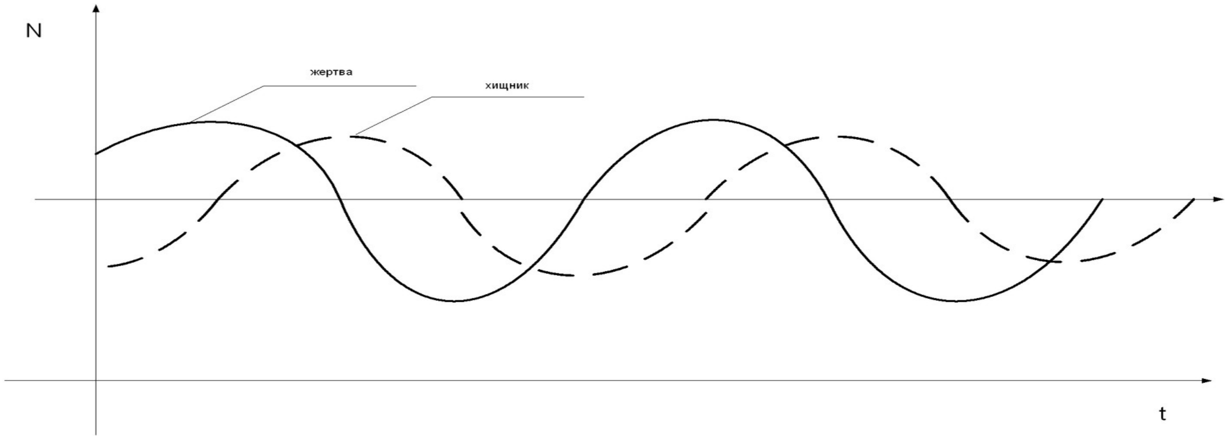
$$\begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{-m}{k} \\ kr & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+rm=0.$$

Корни $\lambda_{1,2.}=\pm i\sqrt{rm}$ - чисто мнимые числа. Точка покоя – центр. В исходных переменных фазовые траектории имеют вид:



Стрелки указывают направление изменения состояния системы со временем.

Согласно этому движению по траектории численность популяций хищника и жертвы совершают незатухающие периодические колебания, причем колебания численности хищника отстает по фазе от колебаний численности жертвы (на четверть периода).



Усложним модель, введя ограниченность ресурсов для жертвы, например, вследствие внутривидовой конкуренции.

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = rN_1 - cN_1N_2 - \gamma N_1^2 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -mN_2 + kcN_1N_2 \end{cases} \qquad (7)$$

Изменение состояния на фазовой плоскости определяется уравнением

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{-mN_2 + kcN_1N_2}{rN_1 - cN_1N_2 - \gamma N_1^2}$$

Точки покоя (7) определяются из системы:

$$\begin{cases} N_1(r - cN_2 - \gamma N_1) = 0 \\ N_2(-m + kcN_1) = 0 \end{cases}$$

Нетривиальная точка покоя имеет вид

$$\begin{cases} N_2^{\square} = \dfrac{\mathrm{kcr} - \gamma m}{\mathrm{kc}^2} \\ N_1^{\square} = \dfrac{m}{k\,c} \end{cases} \qquad (8)$$

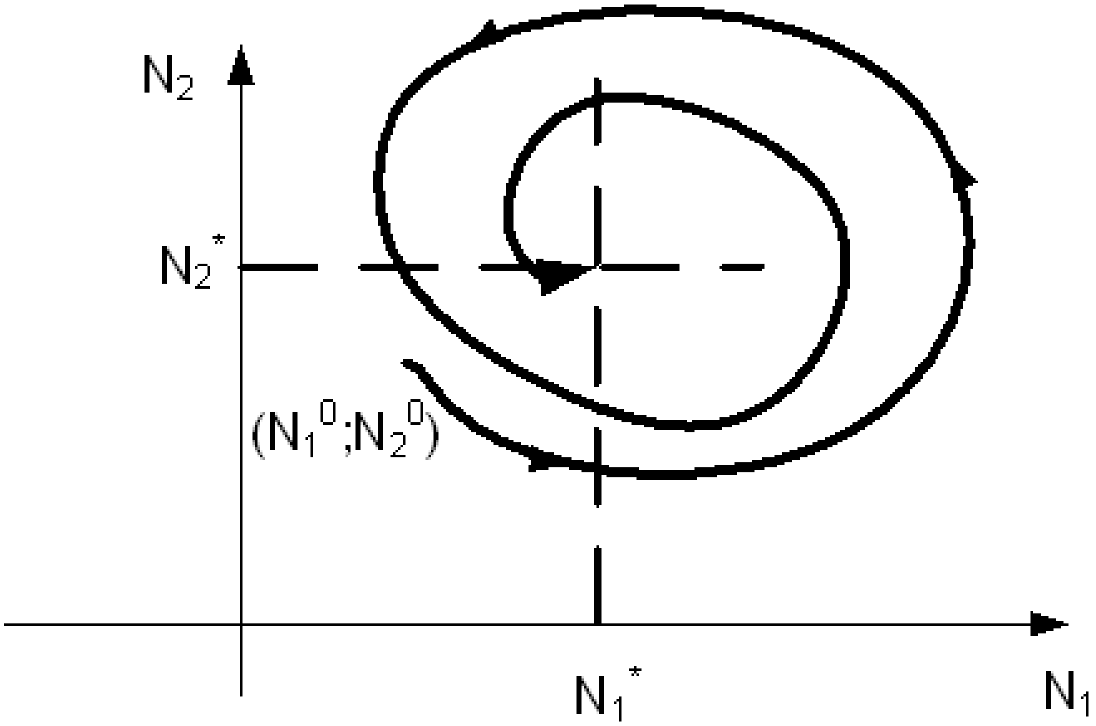
при условии при условии существования положительной точки равновесия $N_2^{\square} > 0$ или при условии

$$\frac{m}{\mathrm{kc}} < \frac{r}{\gamma} \qquad (9)$$

что означает, что «емкость» среды для жертвы $K = \frac{r}{\gamma}$ достаточно велика, чтобы популяция жертвы могла «прокормить» хищника.

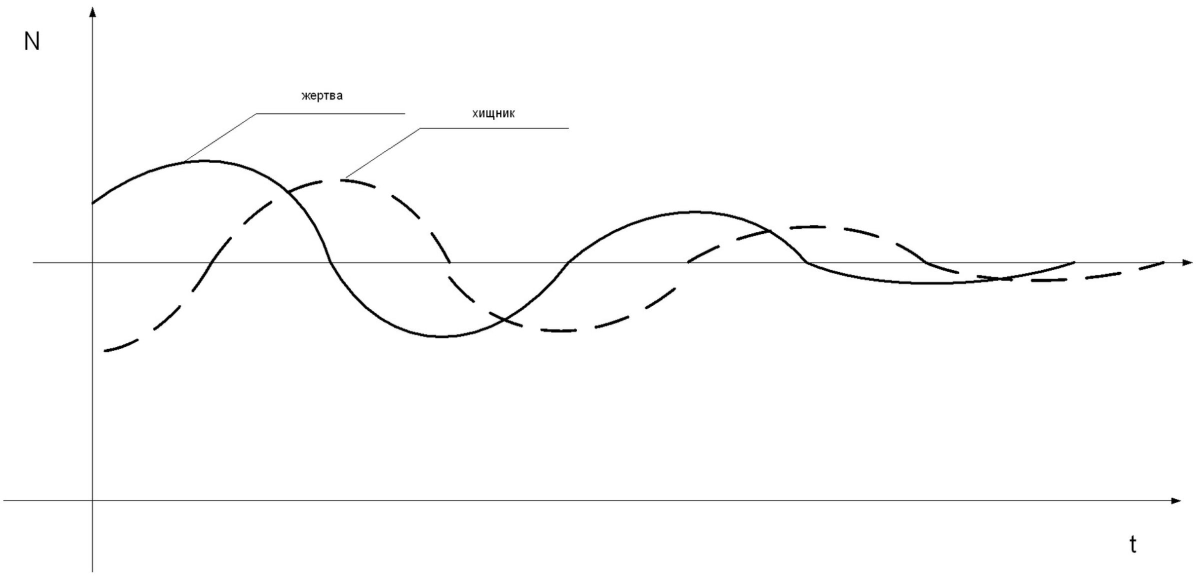
Исследование на устойчивость показывает, что точка покоя – устойчивый фокус и на фазовой плоскости $(N_1; N_2)$.

Фазовый портрет решения имеет вид спирали:



В системе «хищник-жертва» возникают затухающие колебания. Численности жертв и хищников стремятся к своим равновесным значениям (8).

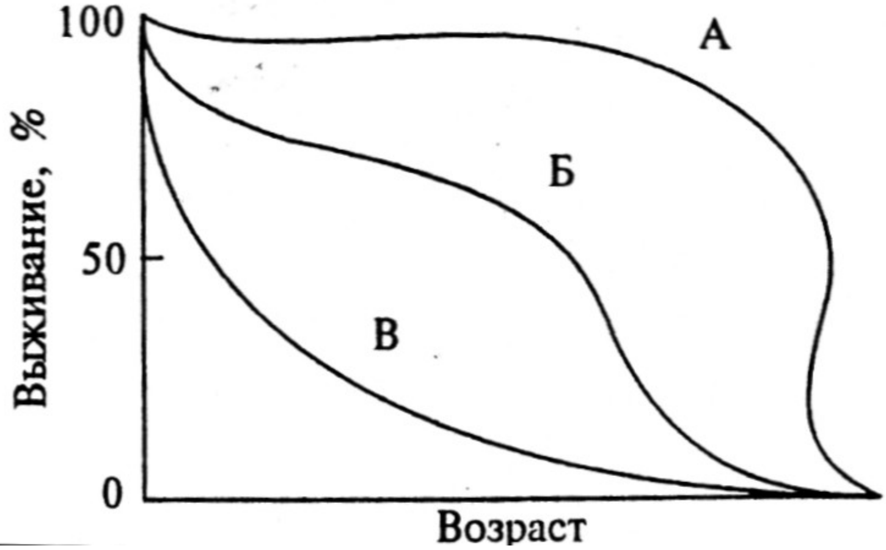
Графики зависимости численностей видов:


N
жертва
хищник
t

Процесс выживаемости популяций

Рассмотрим динамику выживания определенного поколения особей какой-либо популяции от рождения до полного исчезновения.

Модели для разного типа популяций дают следующую картину выживаемости популяций



Кривая А представляет собой идеальную кривую выживаемости для популяции, где главным фактором смертности является старение. Такая кривая наиболее характерна для человеческого рода.

Кривая Б – кривая выживаемости популяций с высокой смертностью в ранний период. Самая распространенная модель выживаемости в растительном и животном мире.

Кривая В – описывает процесс выживаемости популяции, когда в основном внешние факторы определяют смертность. Гибель особей начинается задолго до процесса старения.

Компьютерное моделирование системы "хищник-жертва"

Для моделирования воспользуемся пакетом прикладных математических программ Scilab, который является альтернативой MATLAB. С помощью данной программы возможно построение графика.

Чтобы смоделировать данную систему необходимо поставить задачу.

Задача "хищник-жертва" состоит в том, что у нас есть две группы рыб: травоядные и хищники. Каждый день травоядные плодятся, их количество увеличивается на определённый процент. В то же время хищники постоянно умирают, их количество уменьшается, но если они съедят несколько травоядных, их количество увеличится. Также нужно учитывать то, что травоядные не могут плодиться вечно: чем больше их количество, тем медленнее они плодятся, т.к. страдают от перенаселённости. Изменение количества рыб можно представить такой формулой:

- травоядные: $x_{n+1}=(a-b*x_n)*x_n-d*x_n*y_n$

- хищники: $y_{n+1} = c * y_n + d * x_n * y_n$

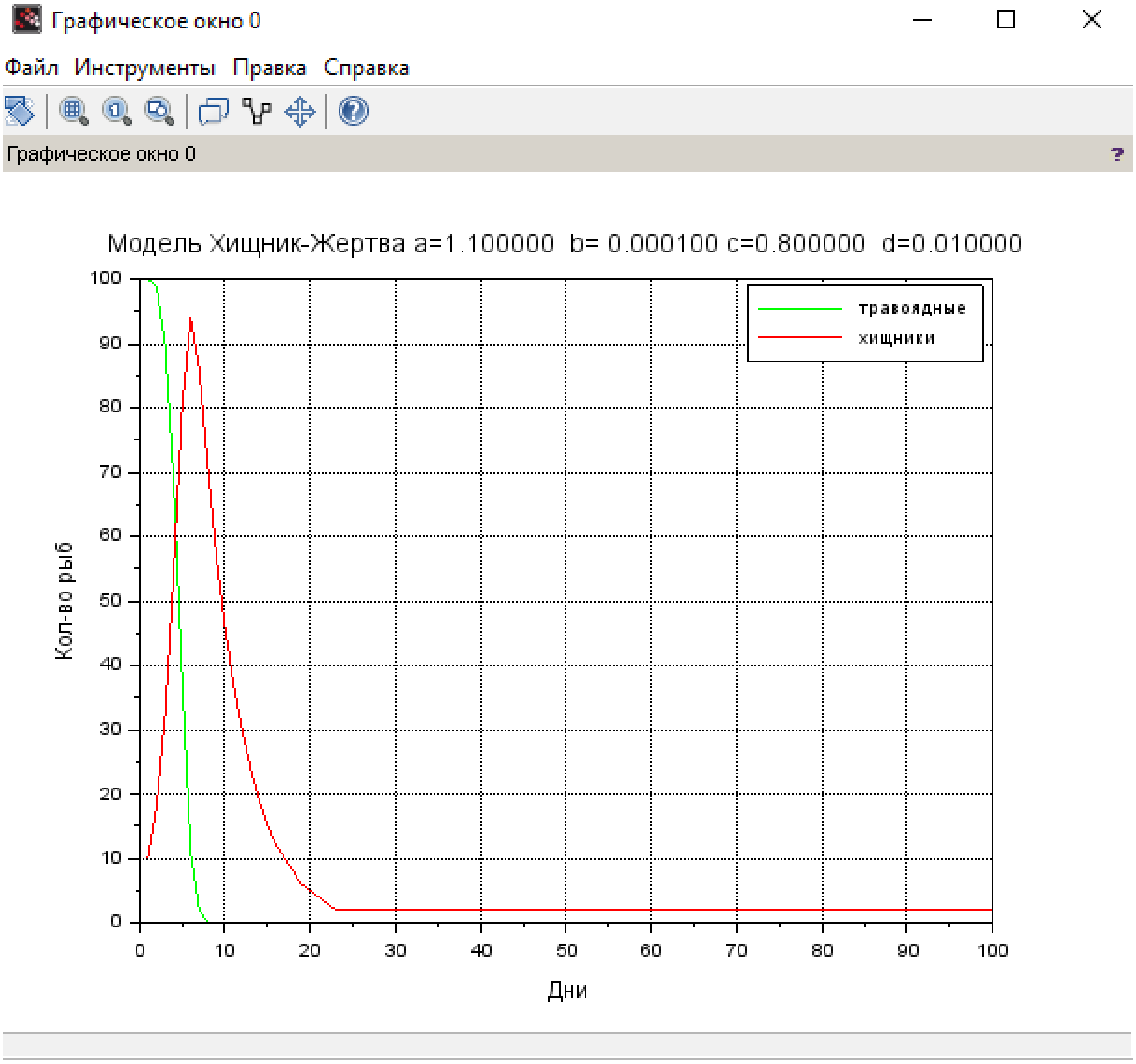
где a - коэффициент роста количества травоядных;
b - коэффициент перенаселённости;
c - коэффициент смертности хищников;
d - вероятность съедения жертвы хищником.

При этом число a должно быть чуть больше 1,
число b должно быть в несколько десятков раз меньше числа a,
число c будет чуть ниже 1,
число d - не больше 1.

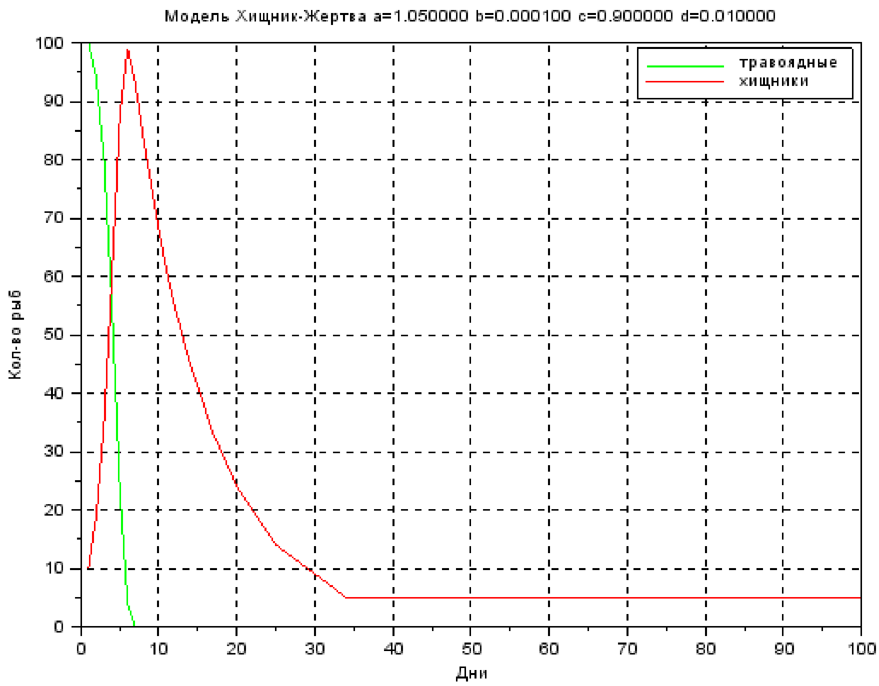
Код реализации в Scilab представлен ниже.

```
function fish(a, b, c, d)
x=zeros(100,0); // Создаёт матрицу, состоящую из нулей
y=zeros(100,0);
x(1)=100;
y(1)=10;
for i=2:100
x(i)=round((a-b*x(i-1))*x(i-1)-d*x(i-1)*y(i-1));
y(i)=round(c*y(i-1)+d*x(i-1)*y(i-1));
end
t=[1:100];
clf;
plot(t, x,'g', t, y,'r');
 set(gca(),"grid",[1 1]);
 xlabel("Дни");
 ylabel("Кол-во рыб");
 legend(['травоядные';'хищники']);
 title(msprintf('Модель Хищник-Жертва a=%f  b=% f c=%f  d=%f' , a, b, c, d));
endfunction
```

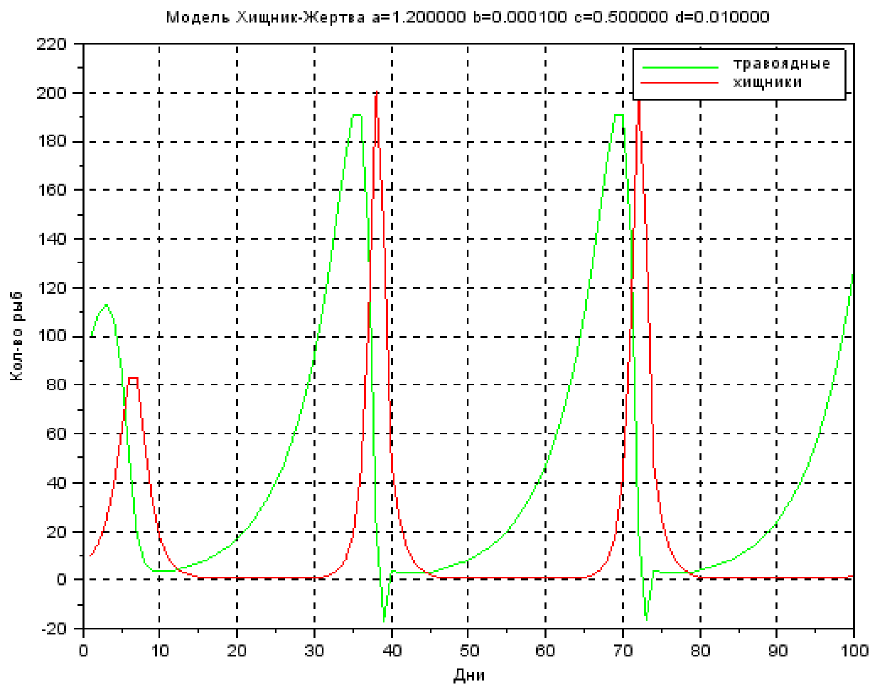
Подбирая различные значения a, b , c и d, были получены графики:



Графическое окно 0
Файл Инструменты Правка Справка
Графическое окно 0
Модель Хищник-Жертва a=1.100000 b= 0.000100 c=0.800000 d=0.010000
травоядные
хищники
Кол-во рыб
Дни



Модель Хищник-Жертва a=1.050000 b=0.000100 c=0.900000 d=0.010000
травоядные
хищники
Кол-во рыб
Дни



На первых двух картинках, у нас были значения смертности хищников 0.8 и 0.9, следовательно, хищники плодились слишком быстро и съели всю рыбу. А на третьем графике данный параметр был снижен до 0.5,и, хищники стали умирать быстрее, поэтому травоядные рыбы успевали плодиться и выжили.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy' = 4$ - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; $y'' - xy' + 5y = 1 + x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + \phi(y)dy = 0$, где $f(x)$ и $\phi(y)$ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx = -\phi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух dy, dx - уравнения с разделенными дифференциалов. Например, $xdx + ydy = 0$, $2ydy = 3x^2 dx$

переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием. **Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными**

Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \phi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $\phi(x)$, $\Phi(y)$, $F(y)$ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим $\int xdx + \int ydy = C$; $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$; $x^2 + y^2 = 2C$.

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$= (x^2 - 1)dx$, если $y = ... = ...$

Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} - 1 + C$, откуда $C = \frac{14}{3}$. Итак, получаем ответ:

$y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения dy 4, при x 1.

Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x^2+1)(y^2-1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$.

Теперь переменные разделены; интегрируя, находим

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=C_1;\quad \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\frac{1}{2}\ln C.$$

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим $\ln(x^2+1)(y^2-1)=\ln C$, откуда $(x^2+1)(y^2-1)=C$. Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1) $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$
2) $xdy-ydx=xdx$ Ответ: $y=x(\ln|x|+c)$
3) $(2x-y)dx-xdy=0$ Ответ: $x^2-xy=c$
4) $xy`=y-xe^{y/x}$ Ответ: $y=-x\ln\ln(cx)$

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1) $y`+2xy=2x$ Ответ: $y=1+ce^{-x\cdot x}$
2) $y`+3y=e^{2x}$ Ответ: $y=1/5e^{2x}+ce^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1) $y``=x$ Ответ: $y=x^3/6+c_1x+c_2$
2) $y``-3y`/x=x$ Ответ: $y=c_1x^4/4-x^3/3+c_2$
3) $yy``-2y`^2=0$ Ответ: $y=-1/(c_1x+c_2)$

1. $xdy+2ydx=0$ dy

2. $\frac{}{2x}+ydx=0$

3. $' = x^2dy=y^2dx$

4. $y'=x$ 5. $y=y^2\cos x$

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $y' = y^2 \cos x$; б) $y' = tgx tgy$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а) $2y' = \sqrt{x}\, y$, если $y = 1$ при $x = 4$;

б) $2\sqrt{y} = y'$; если $y = 1$ при $x = 0$;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:

1. $y' = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

Найти решение однородных дифференциальных уравнений:

1. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y}$. **2.** $x^3 y' = y\,(y^2 + x^2)$.

Задание 3

Найти решение линейных дифференциальных уравнений:

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3 \ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.1, 9.2 (с. 431-454).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 95-98 (с. 255-264).

1.Тема занятия № 2 и еѐ актуальность. Стационарное состояние (точка покоя, особая точка, состояние равновесия). Устойчивость состояния равновесия. Аналитический метод исследования устойчивости стационарного состояния (метод Ляпунова).
Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния. Логистическое уравнение.

Применение дифференциальных уравнений в биологииПрименение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.

3. Учебные цели:

Овладение базовыми понятиями математического моделирования.
Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен
Знать: базовые понятия математического моделирования, цель математического моделирования.

Уметь: решать прикладные задачи вычислительного и теоретического характера.

Владеть: методами математического моделирования на примере простейших биологических систем.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. Стационарное состояние (точка покоя, особая точка, состояние равновесия).
2. Устойчивость состояния равновесия.
3. Аналитический метод исследования устойчивости стационарного состояния (метод Ляпунова).
4. Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния.
5. Логистическое уравнение.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 15 академических часов по рабочей программе дисциплины «Математическое моделирование в биологии»направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения $dy/dx=x$

1.$y=x+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$y=x^3/3+c$; 4.$y=-x+c$

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при $x=1$, $y=0$

1.$y=x^2+1$; 2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$; 4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка

1.ydy-xdx=0; 2.xdy-ydx=xdx; 3.$xdy=(y+3x^2)dx$;

4.$dy=x^2dx$ 4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка

1.dy-xdx=0; 2.xdy-ydx=ydy; 3.$xdy-ydx=x^3dx$; 4.$4dy-x^3dx=0$

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=2x-1/x

1.$y=x^2+x+c$; 2.y=2x-lnx+c; 3.$y=x^2+\ln x+c$; 4.$y=x^{2-}\ln x+c$

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения y``=2x+1

1.$y=x^2+x+c$; 2.$y=x^3+c_1x+c_2$; 3.$y=x^3/3+x^2/2+c_1x+c_2$; 4.$x^3+c_1x^2+c_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения $dy/y^2=xdx$ имеет вид

1.$-1/y=x^2/2+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$1/y=x^2/2+c$;

4.$-1/y=x^2+c$ Ответы на тесты:

1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, xy 4 - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; y xy $5y$ 1 x^2 - дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f\,x\,dx(\,)\,\phi(\,)x\,dy\ 0$, где $f\,x(\,)$ и $(\,)x$ ϕ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f\,x\,dx(\,)\,\phi(\,)y\,dy$ и рассматривать как равенство двух ^{2}, $dy\ dx$ - уравнения с разделенными дифференциалов. Например, $xdx\ ydy$ 0, $2ydy$ $3x$ dx

y x

переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием. **Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными**

Уравнение вида $f(x)F(y)dx\ (x)\ (y)dy\ 0$, где $f(x)$, (x), (y), $F(y)$ φ Φ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdxydy$ 0.

$+ \quad =$

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя,

$\int + \int =$ получим xdx $\quad ydy\ C$; $x2 \quad y2\ C$; $x2 + y^2 = 2C$.

2 2

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$= (x^2 - 1)dx$, если $y \quad = \quad =$

Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} - 1 + C$, откуда $C = \frac{14}{3}$. Итак, получаем ответ: $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy4$, при x 1.
Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y21)dx + y(x2 + 1)dy = 0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x2 \quad 1)(y21)$, получим $xxdx2$

1 $\quad yydy2 \quad 1 \quad 0$.

Теперь переменные разделены; интегрируя, находим

$\int \frac{xdx}{x2+1} \quad \frac{ydy}{y2-1} \int \quad C$; $\frac{1}{2}\ln(x2 \quad 1) + \frac{1}{2}\ln(y2 \quad 1) - \frac{1}{2}\ln C$.

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим $\ln(x^2 \quad 1)(y^2 \quad 1) = \ln C$, откуда $(x^2 + 1)(y^2 - 1) = C$.

Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1)$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$

2)xdy-ydx=xdx Ответ: y=x(lnIxI+c)

3)(2x-y)dx-xdy=0 Ответ: x^2-xy=c

4)$xy`=y-xe^{y/x}$ Ответ: y=-xlnln(cx)

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1)y`+2xy=2x Ответ: $y=1+ce^{-x \cdot x}$

2)$y'+3y=e^{2x}$ Ответ: $y=1/5e^{2x}+ce^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1)$y''=x$ Ответ: $y=x^3/6+c_1x+c_2$

2)$y''-3y'/x=x$ Ответ: $y=c_1x^4/4-x^3/3+c_2$

3)$yy''-2y'^2=0$ Ответ: $y=-1/(c_1x+c_2)$

4. $+xdy\ 2=ydx$

$0\ dy$

5. $\text{—} + ydx\ 0 =$

$2x$ $=$

6. $, = x^2dy\ y^2dx$

4. $y, = x$ 5. $y\ \ y^2\cos x$

Решить типовые задачи.

3. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

4. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $y' = y^2\cos x$; б) $y' = tgx tgy$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а) $2y' = x\sqrt{y}$, если $y = 1$ при $x = 4$;

б) $2\sqrt{y} = y'$; если $y = 1$ при $x = 0$;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:

1. $y' = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

Найти решение однородных дифференциальных уравнений:

1. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y}$. **2.** $x^3y' = y(y^2+x^2)$.

Задание 3

Найти решение линейных дифференциальных уравнений:

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3\ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

3. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.1, 9.2 (с. 431-454).

4. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 95-98 (с. 255-264).

1. **Тема занятия № 3 и еѐ актуальность**. Уравнение экспоненциального роста. Ограниченный рост. Модель популяции с наименьшей критической численностью. Дискретные модели популяций. Уравнение с запаздыванием.

Математические и компьютерные методы занимают важное место в современных биологических исследованиях. Без них было бы невозможным выполнение таких глобальных проектов, как геном человека, расшифровка пространственной структуры сложных биомакромолекул, дистанционная диагностика, компьютерное моделирование новых эффективных лекарств («драг-дизайн»), планирование мероприятий по предотвращению распространения эпидемий, анализ экологических последствий работы промышленных объектов, биотехнологические производства и многое другое.

2. **Учебные цели**:

Овладение базовыми понятиями математического моделирования.
Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен
Знать: базовые понятия математического моделирования, цель математического моделирования.

Уметь: решать прикладные задачи вычислительного и теоретического характера.

Владеть: методами математического моделирования на примере простейших биологических систем.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. Уравнение экспоненциального роста.
2. Ограниченный рост.
3. Модель популяции с наименьшей критической численностью.
4. Дискретные модели популяций.
5. Уравнение с запаздыванием.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 15 академических часов по рабочей программе дисциплины «Математическое моделирование в биологии» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=x

1.y=x+c;   2.$y=x^2/2+c$;   3.$y=x^3/3+c$;   4.y=-x+c

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при x=1, y=0

1.$y=x^2+1$;   2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$;   4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка

1.ydy-xdx=0;   2.xdy-ydx=xdx;   3.$xdy=(y+3x^2)dx$;

4.$dy=x^2dx$ 4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка

1.dy-xdx=0;   2.xdy-ydx=ydy;   3.$xdy-ydx=x^3dx$;   4.$4dy-x^3dx=0$

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=2x-1/x

1.$y=x^2+x+c$;   2.y=2x-lnx+c;   3.$y=x^2+lnx+c$;   4.$y=x^{2-}lnx+c$

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения y``=2x+1

1.$y=x^2+x+c$;   2.$y=x^3+c_1x+c_2$;   3.$y=x^3/3+x^2/2+c_1x+c_2$;   4.$x^3+c_1x^2+c_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения $dy/y^2=xdx$ имеет вид

1.$-1/y=x^2/2+c$;   2.$y=x^2/2+c$;   3.$1/y=x^2/2+c$;

4.$-1/y=x^2+c$ Ответы на тесты:

1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy' + 4 = y$ - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; $y'' + xy' + 5y = 1 + x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + \phi(x)dy = 0$, где $f(x)$ и $\phi(x)$ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx = -\phi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Например, $xdx + ydy = 0$, $2ydy = 3x^2dx$ - уравнения с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$, $F(y)$ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

$+ \quad =$

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя,

$\int + \int =$ получим xdx $\quad ydy\ C$; $x2$ $\quad y2\ C$; $x2 + y^2 = 2C$.

2 2

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$= (x^2 - 1)dx$, если y $\quad = \quad =$

Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} - 1 + C$, откуда $C = \frac{14}{3}$. Итак, получаем ответ:

$y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy4$, при x 1.

Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y21)dx + y(x2 + 1)dy = 0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x2 + 1)(y21)$, получим $xxdx2$

1 $\quad yydy2 + 1 \quad 0$.

Теперь переменные разделены; интегрируя, находим

$\int xdx + ydy \int C$; $1 \ln(x2 - 1) + 1 \ln(y2 1) - = 1 \ln C$.

$x2 \quad 1 \quad y2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим $\ln(x^2 \; 1)(y^2 \; 1) = \ln C$, откуда $(x^2 \; 1)(y^2 \; 1) = C$.

Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1)$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$

2)xdy-ydx=xdx Ответ: y=x(lnIxI+c)

3)(2x-y)dx-xdy=0 Ответ: x^2-xy=c

4)xy`=y-xe$^{y/x}$ Ответ: y=-xlnln(cx)

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1)y`+2xy=2x Ответ: y=1+ce$^{-x\cdot x}$

2) $y'+3y=e^{2x}$ Ответ: $y=1/5e^{2x}+ce^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1) $y''=x$ Ответ: $y=x^3/6+c_1x+c_2$

2) $y''-3y'/x=x$ Ответ: $y=c_1x^4/4-x^3/3+c_2$

3) $yy''-2y'^2=0$ Ответ: $y=-1/(c_1x+c_2)$

7. $xdy = 2ydx$

8. $\frac{dy}{2x} + ydx = 0$

9. $x^2dy = y^2dx$

4. $y' = x$ 5. $y' = y^2 \cos x$

Решить типовые задачи.

5. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

6. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $y' = y^2 \cos x$; б) $y' = tgx\,tgy$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а) $2y' = x\sqrt{y}$, если $y = 1$ при $x = 4$;

б) $2\sqrt{y} = y'$; если $y = 1$ при $x = 0$;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:

1. $y' = \frac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

Найти решение однородных дифференциальных уравнений:

1. $xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - \frac{x^2}{y}$. **2.** $x^3y' = y(y^2+x^2)$.

Задание 3

Найти решение линейных дифференциальных уравнений:

1. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3 \ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

5. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.1, 9.2 (с. 431-454).

6. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 95-98 (с. 255-264).

1. **Тема занятия № 4 и её актуальность**. Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Математические и компьютерные методы занимают важное место в современных биологических исследованиях. Без них было бы невозможным выполнение таких глобальных проектов, как геном человека, расшифровка пространственной структуры сложных биомакромолекул, дистанционная диагностика, компьютерное моделирование новых эффективных лекарств («драг-дизайн»), планирование мероприятий по предотвращению распространения эпидемий, анализ экологических последствий работы промышленных объектов, биотехнологические производства и многое другое.

2. **Учебные цели**:

Овладение базовыми понятиями математического моделирования.
Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен
Знать: базовые понятия математического моделирования, цель математического моделирования.

Уметь: решать прикладные задачи вычислительного и теоретического характера.

Владеть: методами математического моделирования на примере простейших биологических систем.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений

4. Вид занятия: практическое занятие.
5. Продолжительность занятия: 3 часа
На изучение данной темы, отведено 12 академических часа по рабочей программе дисциплины «Математическое моделирование в биологии» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1.Дано дифференциальное уравнение $y``+2y`+5y=0$. Тогда его общим решением является
1.$e^{-x}(c_1\cos4x+c_2\sin4x)$; 2.$e^{-x}(c_1\cos2x+c_2\sin2x)$; 3.$e^{x}(c_1\cos2x+c_2\sin2x)$

Ответ: 1.2

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

<u>Модель «хищник жертва»</u>

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Цель работы: изучить модель «хищник жертва» и при помощи пакета прикладных программ промоделировать модель хищник-жертва с возможностью построения графика.

Изучение данной модели необходимо начать с фазового портрета автономной линейной системы второго порядка.

Фазовый портрет автономной линейной системы второго порядка

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}. \qquad (1)$$

Положение равновесие:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Если $ad - bc \neq 0$,точка (0;0) - единственная точка покоя системы.

Фазовые траектории определяются из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \qquad (2)$$

Преобразуем последнее уравнение при помощи линейной неособенной подстановки

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases}, \text{ причем } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \qquad (3)$$

так, чтобы в новых переменных система имела наиболее простой вид.

Из аналитической геометрии известно, что вид уравнения (2) в новых переменных зависит от корней ***характеристического уравнения*** системы (1), т.е.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Корни (4) называются ***собственными числами*** системы (1).

Анри Пуанкаре показал, что возможны следующие случаи, каждому из которых отвечает свое расположение фазовых кривых в окрестности точки покоя.

I. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Система (1) приводится к виду

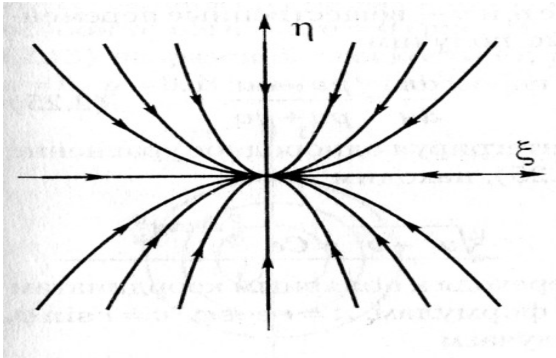
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi} \qquad (5)$$

Различают четыре случая.

1) λ_1, λ_2 - вещественные одного знака.

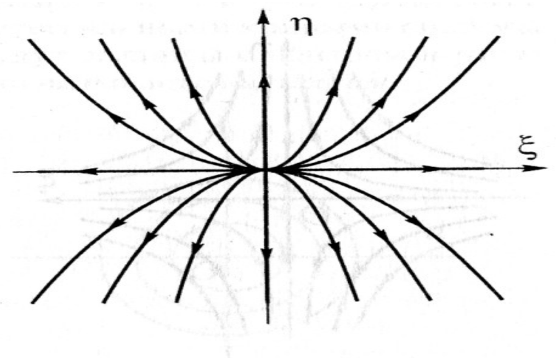
Точка покоя $\xi = 0, \eta = 0$ называется ***узлом.***

Вид фазовых траекторий:



устойчивый узел

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



неустойчивый узел

$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

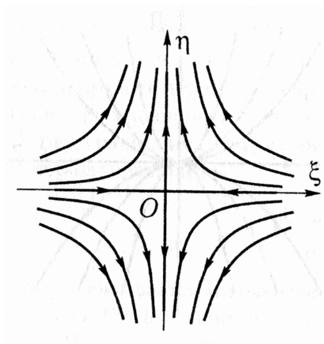
Характеристическое уравнение (4) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. Точка покоя – неустойчивый ***узел***.

2) λ_1, λ_2 - вещественные и противоположных знаков.

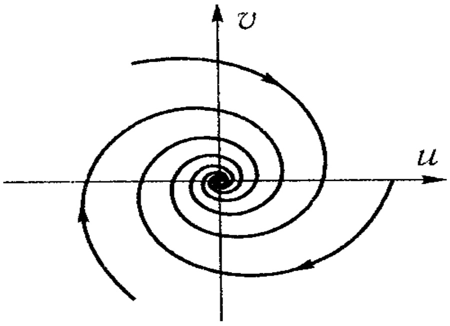
Точка покоя - ***седло*** **(неустойчивая точка покоя).**



3) λ_1, λ_2 - комплексно сопряженные: $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$, $(q \neq 0)$. Выделяем вещественные и мнимые части:

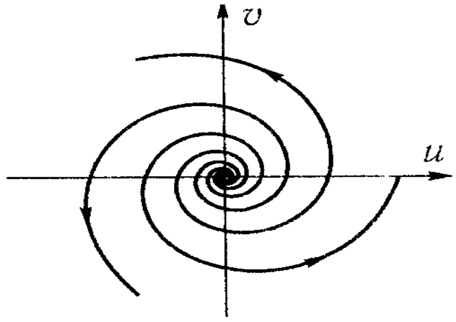
$$\begin{cases} \xi = u + iv, \\ \eta = u - iv \end{cases}.$$

Точка покоя $u = 0, v = 0$ - ***фокус.***



устойчивый фокус

$p < 0$



неустойчивый фокус

$p > 0$

Пример.

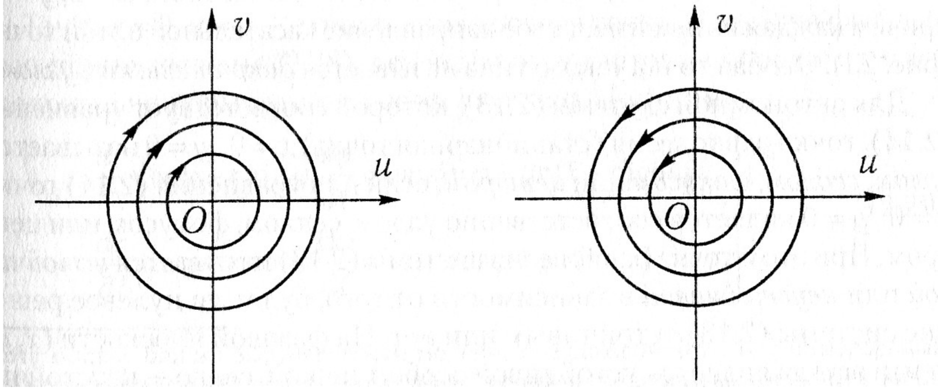
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$$

Характеристическое уравнение (4) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

имеет дискриминант $D = 4 - 20 = -16$, откуда $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$. Точка покоя – неустойчивый узел.

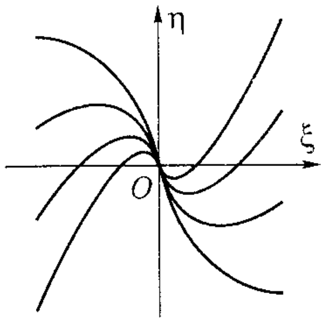
4) λ_1, λ_2 - чисто мнимые: $\lambda_1 = \mathrm{iq}$, $\lambda_2 = -\mathrm{iq}$. Тогда фазовые траектории – окружности. Точка покоя – ***центр*** (**устойчивая точка покоя**)



II. Корни характеристического уравнения кратные.

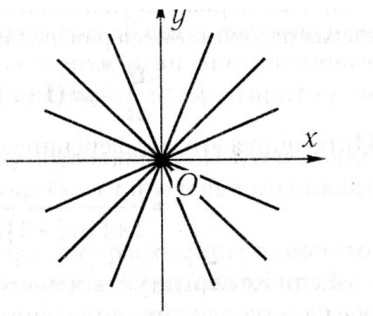
1) Кратные корни не равные нулю, причем $\mathrm{rang}(A - \lambda_1 E) = 1$.

Точка покоя - ***вырожденный узел***.



2) Кратные корни не равные нулю, причем $\mathrm{rang}(A - \lambda_1 E) = 0$.

Точка покоя – ***дикритический узел***.



Взаимодействие двух видов.

Непосредственное взаимодействие между двумя видами удобно разбить на три категории.

4. Конкуренция ¿: каждый из видов оказывает подавляющее действие на рост другого вида.
5. Комменсализм (симбиоз) ¿: каждый из видов ускоряет рост другого вида.
6. Хищничество ¿: один вид («хищник») подавляет рост другого вида («жертва»), жертва ускоряет рост хищника.

Рассмотрим третий вид взаимодействия.

Система «хищник – жертва».

Допущения:

5. Среда однородная.
6. Численность данного вида описывается одной переменной, т.е. мы пренебрегаем возрастными, половыми и генетическими различиями.
7. Пренебрегаем случайными флуктуациями.
8. Взаимодействие мгновенное.

В биологической литературе существует огромное число работ, в которых подобные системы либо наблюдались в природе, либо моделировались на «модельных» популяциях в лабораторных условиях.

Однако их результаты зачастую *противоречат* друг другу:

- в одних экспериментах наблюдались, на первый взгляд, непонятные явления периодических изменений численности популяций в однородной среде;
- в других наблюдениях системы достаточно быстро разрушались: либо гибнет хищник, а жертва останется, либо гибнет жертва, а вслед за ней хищник.

Построенная в 20-х годах XX века Вито Вольтера модель сообщества «хищник-жертва» объясняет многие из этих особенностей. Это первый успех математической экологии. При рассмотрении этой системы рассмотрим вопросы устойчивости: условия устойчивости и механизмы устойчивости.

Классическая модель Вольтерра

Пусть

$N_1 = N_1(t)$ - численность жертвы,

$N_2 = N_2(t)$ - численность хищников.

Дополнительные допущения.

3. Единственным лимитирующим фактором, ограничивающим размножение жертв, является давление на них со стороны хищников. Ограниченность ресурсов среды для жертвы не учитывается.

4. Размножение хищников ограничивается количеством добытой им пищи (количеством жертв).

$r -$ коэффициент естественного прироста жертвы;

$m -$ коэффициент естественной смертности хищника;

$V = V(N_1) -$ количество (биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени (трофическая функция);

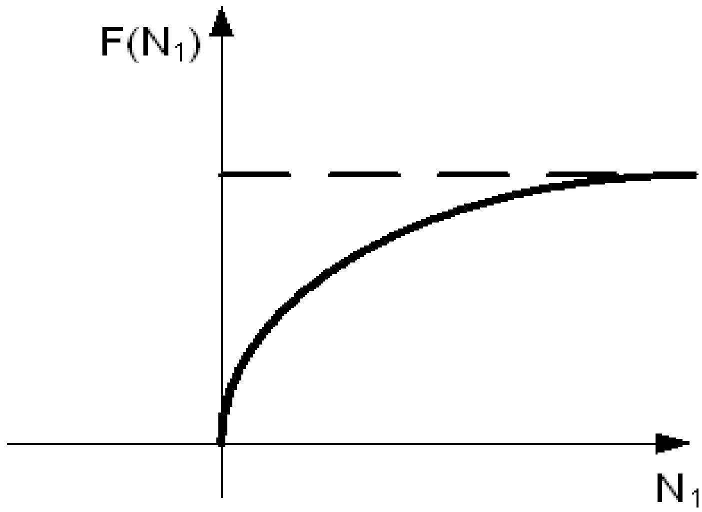
$k -$ часть полученной с биомассы $V(N_1)$энергии, которая расходуется хищником на воспроизводство. Остальная энергии тратится на поддержание основного обмена и охотничьей активности.

Уравнения системы «хищник-жертва»

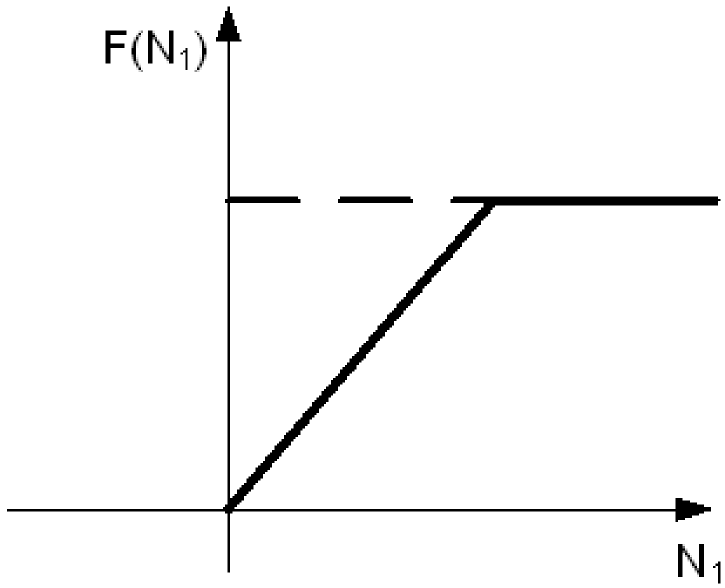
$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 - V(N_1) \cdot N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -mN_2 + kV(N_1) \cdot N_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Функция $V(N_1)$ определяется в экспериментальных работах. К настоящему времени установлено, что эти функции принадлежат к одному из следующих трех типов.

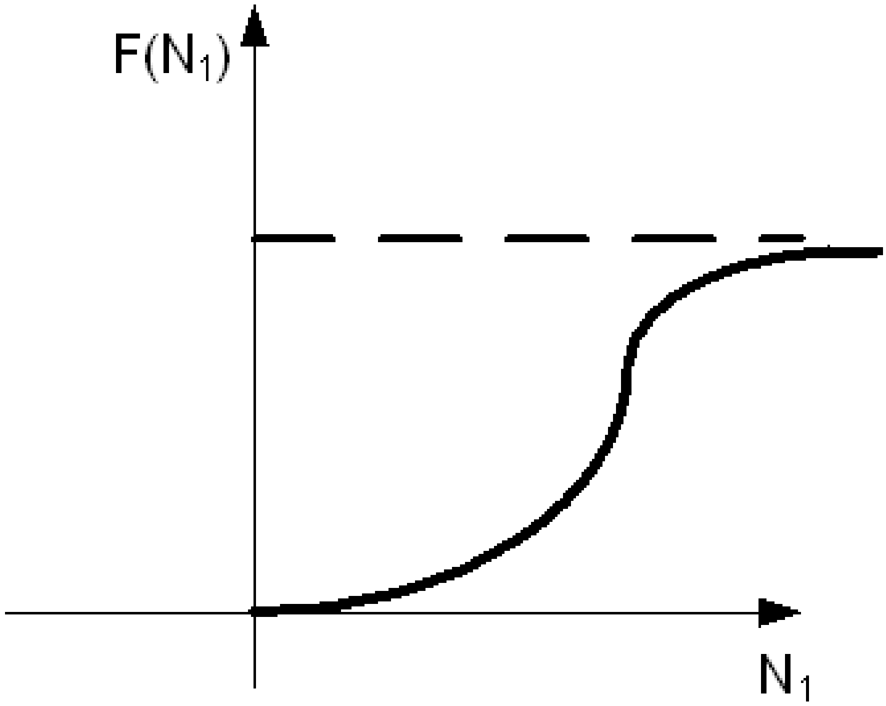
4) Этот тип характерен для беспозвоночных и некоторых видов хищных рыб.



5) Трофическая функция с резко выраженным порогом насыщения характерна для хищников - фильтраторов (моллюсков).



6) Данный тип характерен для позвоночных – организмов, способных к обучению.



При малых значениях численности жертвы почти все жертвы становятся добычей хищника, который всегда голоден и насыщения не наступает. Трофическую функцию можно считать линейной:

$V(N_1) = c \cdot N_1$

Классическая модель Вольтерра:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r N_1 - cN_1 N_2 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -m N_2 + k c N_1 N_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Начальные условия

$$N_1(0) = N_1^0 \qquad (3)$$
$$N_2(0) = N_2^0$$

Система (2) является автономной, т.к. не имеет t в правой части. Изменение состояния системы изображается на фазовой плоскости и является решением уравнения

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{-m N_2 + k c N_1 N_2}{r N_1 - cN_1 N_2}$$

Найдем точки покоя системы (2).

$$\begin{cases} N_1(r - cN_2) = 0 \\ N_2(-m + k c N_1) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Нетривиальная точка покоя системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} N_2 = \dfrac{r}{c} \\ N_1 = \dfrac{m}{k c} \end{cases} \qquad (5)$$

Определим характер точки покоя (5).

Сделаем замену

$$\begin{cases} x = N_1 - N_1^* \\ y = N_2 - N_2^* \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} N_1 = x + \dfrac{m}{kc} \\ N_2 = y + \dfrac{r}{c} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = r\left(x + \dfrac{m}{kc}\right) - c\left(x + \dfrac{m}{kc}\right)\left(y + \dfrac{r}{c}\right) \\ \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -m\left(y + \dfrac{r}{c}\right) + kc\left(x + \dfrac{m}{kc}\right)\left(y + \dfrac{r}{c}\right) \end{cases}$$

Раскроем скобки и получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{-m}{k} y - \mathrm{cxy} \\ \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{krx} + \mathrm{kcxy} \end{cases}$$

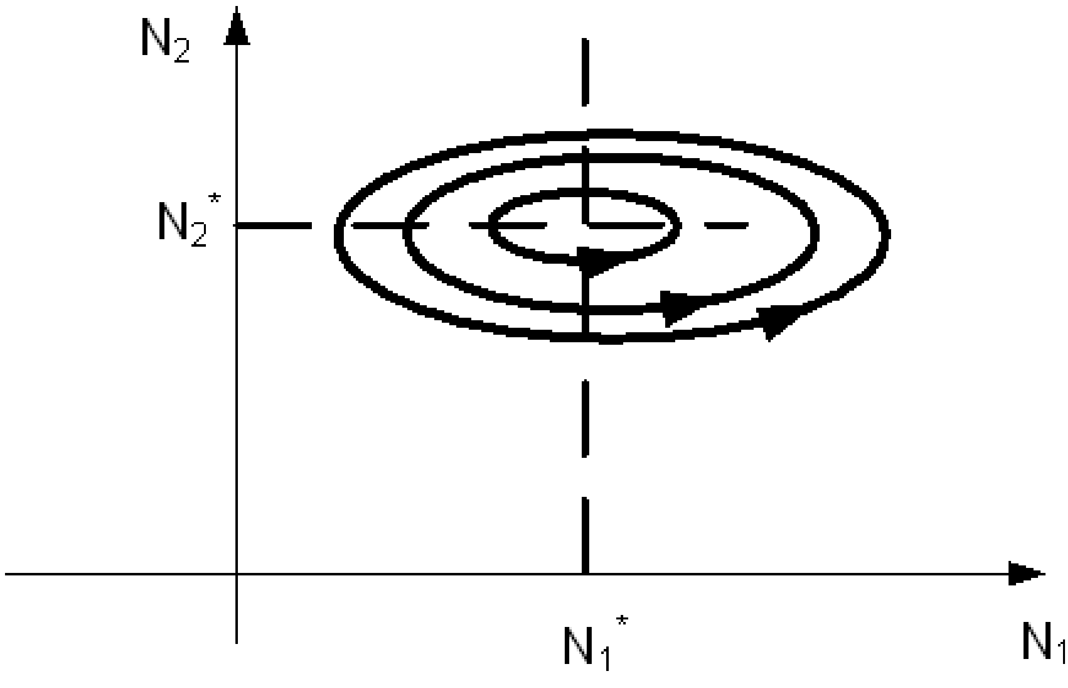
Отбросив нелинейные члены, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{-m}{k} y \\ \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{krx} \end{cases} \qquad (6)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

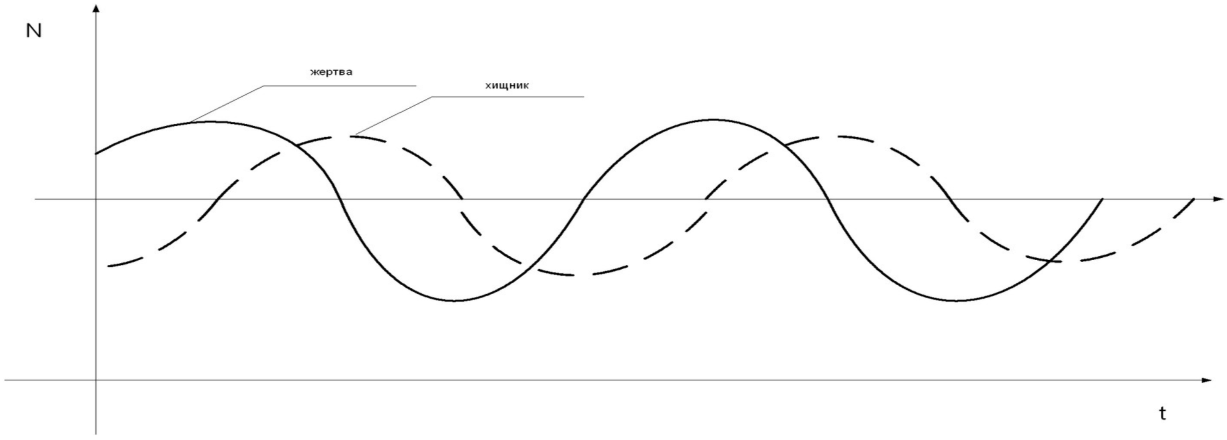
$$\begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{-m}{k} \\ \mathrm{kr} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \mathrm{rm} = 0.$$

Корни $\lambda_{1,2.} = \pm i\sqrt{\mathrm{rm}}$ - чисто мнимые числа. Точка покоя – центр. В исходных переменных фазовые траектории имеют вид:



Стрелки указывают направление изменения состояния системы со временем.

Согласно этому движению по траектории численность популяций хищника и жертвы совершают незатухающие периодические колебания, причем колебания численности хищника отстает по фазе от колебаний численности жертвы (на четверть периода).



Усложним модель, введя ограниченность ресурсов для жертвы, например, вследствие внутривидовой конкуренции.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dN_1}}{\mathrm{dt}} = r\,N_1 - c\,N_1 N_2 - \gamma\,N_1^2 \\ \dfrac{\mathrm{dN_2}}{\mathrm{dt}} = -m\,N_2 + k\,c\,N_1 N_2 \end{cases} \qquad (7)$$

Изменение состояния на фазовой плоскости определяется уравнением

$$\frac{\mathrm{dN_2}}{\mathrm{dN_1}} = \frac{-m\,N_2 + k\,c\,N_1 N_2}{r\,N_1 - c\,N_1 N_2 - \gamma\,N_1^2}$$

Точки покоя (7) определяются из системы:

$$\begin{cases} N_1\left(r - \mathrm{cN_2} - \gamma\,N_1\right) = 0 \\ N_2\left(-m + k\,c\,N_1\right) = 0 \end{cases}$$

Нетривиальная точка покоя имеет вид

$$\begin{cases} N_{2^{\square}} = \dfrac{\mathrm{kcr} - \gamma m}{\mathrm{kc}^2} \\ N_{1^{\square}} = \dfrac{m}{k\,c} \end{cases} \qquad (8)$$

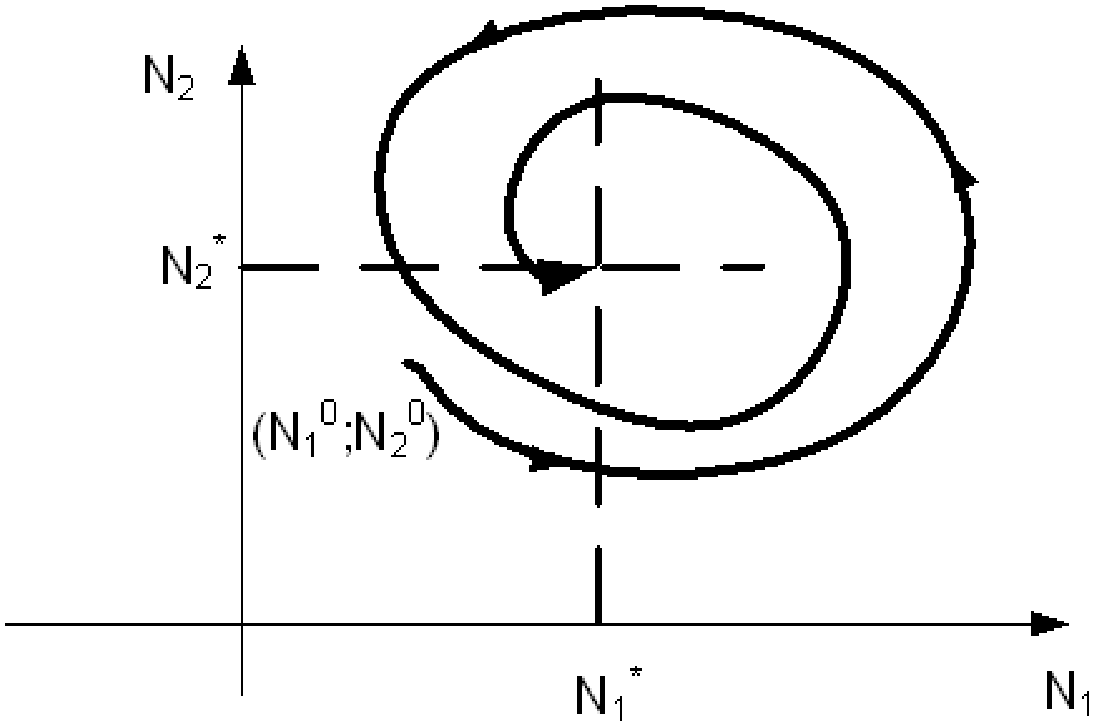
при условии при условии существования положительной точки равновесия $N_2^{\square} > 0$ или при условии

$$\frac{m}{\mathrm{kc}} < \frac{r}{\gamma} \qquad (9)$$

что означает, что «емкость» среды для жертвы $K = \dfrac{r}{\gamma}$ достаточно велика, чтобы популяция жертвы могла «прокормить» хищника.

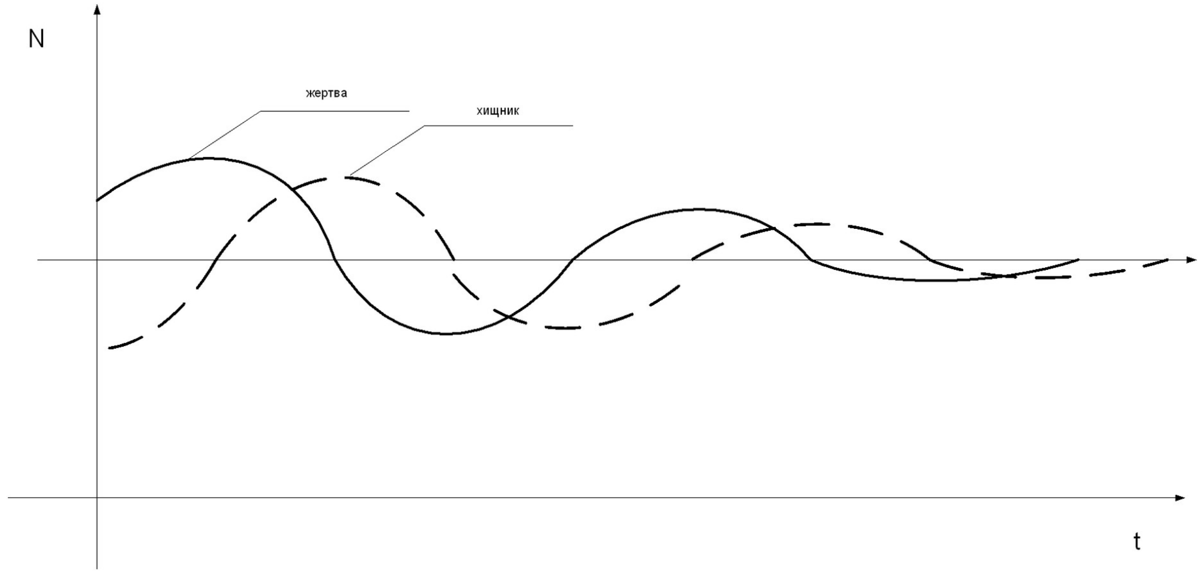
Исследование на устойчивость показывает, что точка покоя – устойчивый фокус и на фазовой плоскости $\left(N_1; N_2\right)$.

Фазовый портрет решения имеет вид спирали:



В системе «хищник-жертва» возникают затухающие колебания. Численности жертв и хищников стремятся к своим равновесным значениям (8).

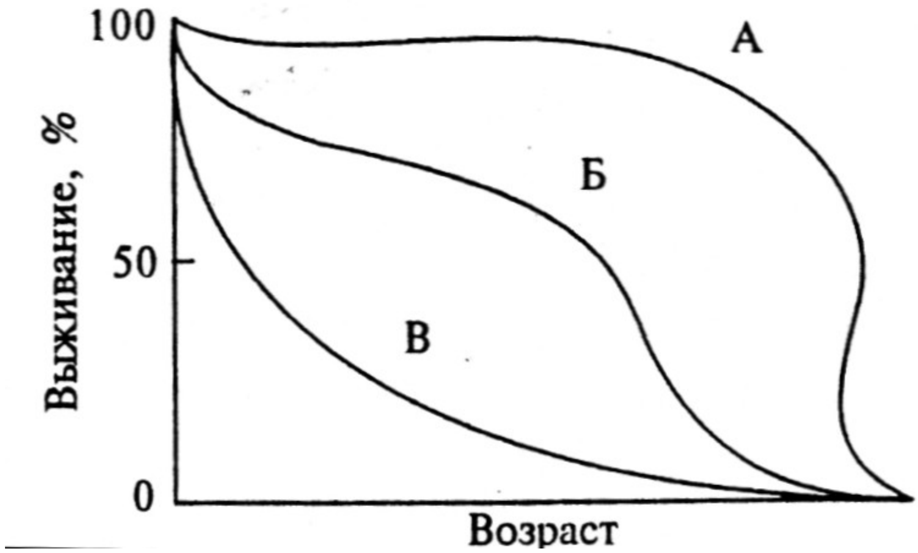
Графики зависимости численностей видов:



Процесс выживаемости популяций

Рассмотрим динамику выживания определенного поколения особей какой-либо популяции от рождения до полного исчезновения.

Модели для разного типа популяций дают следующую картину выживаемости популяций



Кривая А представляет собой идеальную кривую выживаемости для популяции, где главным фактором смертности является старение. Такая кривая наиболее характерна для человеческого рода.

Кривая Б – кривая выживаемости популяций с высокой смертностью в ранний период. Самая распространенная модель выживаемости в растительном и животном мире.

Кривая В – описывает процесс выживаемости популяции, когда в основном внешние факторы определяют смертность. Гибель особей начинается задолго до процесса старения.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Компьютерное моделирование системы "хищник-жертва"

Для моделирования воспользуемся пакетом прикладных математических программ Scilab, который является альтернативой MATLAB. С помощью данной программы возможно построение графика.

Чтобы смоделировать данную систему необходимо поставить задачу.

Задача "хищник-жертва" состоит в том, что у нас есть две группы рыб: травоядные и хищники. Каждый день травоядные плодятся, их количество увеличивается на определённый процент. В то же время хищники постоянно умирают, их количество уменьшается, но если они съедят несколько травоядных, их количество увеличится. Также нужно учитывать то, что травоядные не могут плодиться вечно: чем больше их количество, тем медленнее они плодятся, т.к. страдают от перенаселённости. Изменение количества рыб можно представить такой формулой:

- травоядные: $x_{n+1} = (a - b * x_n) * x_n - d * x_n * y_n$
- хищники: $y_{n+1} = c * y_n + d * x_n * y_n$

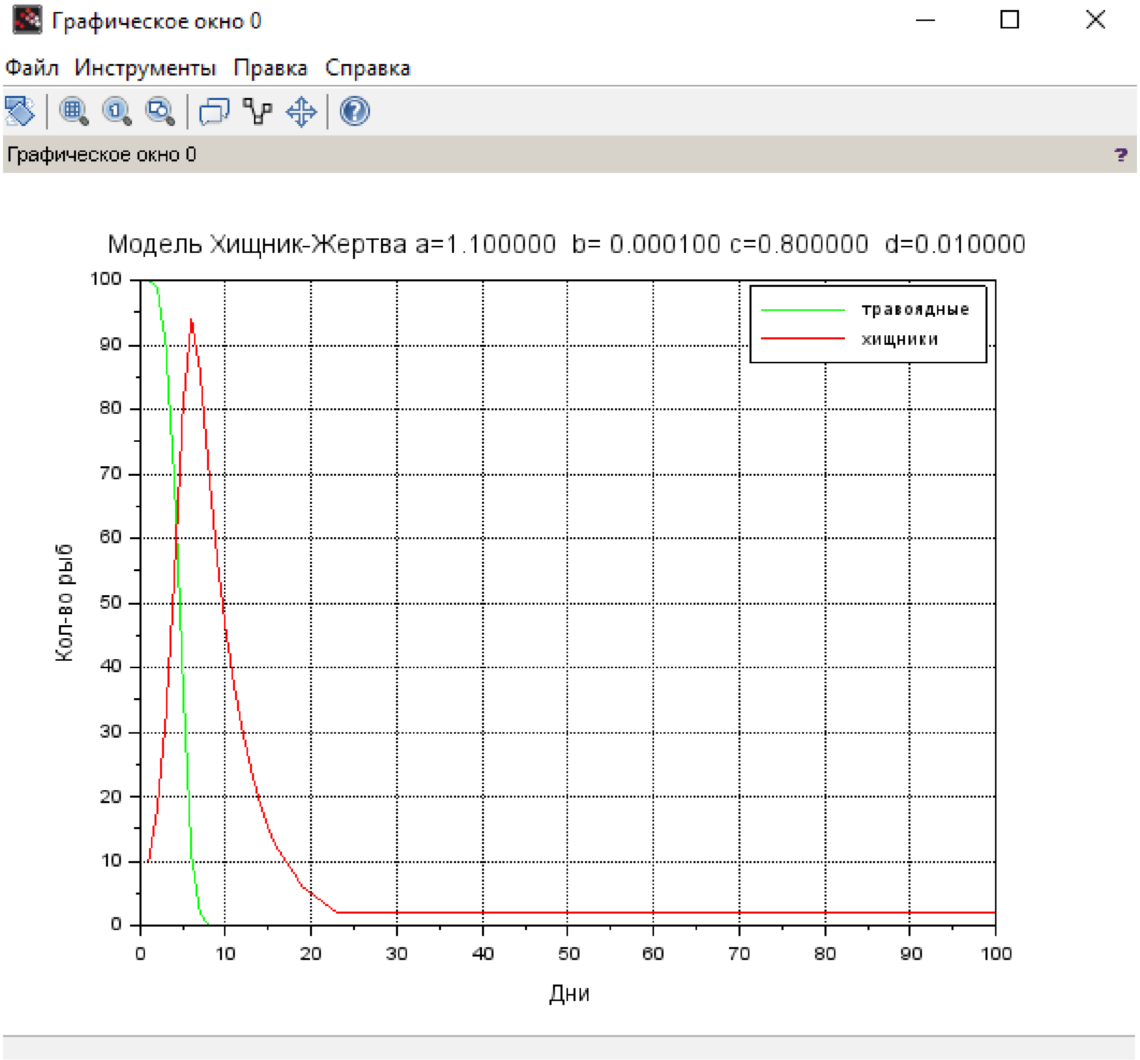
где a - коэффициент роста количества травоядных;
b - коэффициент перенаселённости;
c - коэффициент смертности хищников;
d - вероятность съедения жертвы хищником.

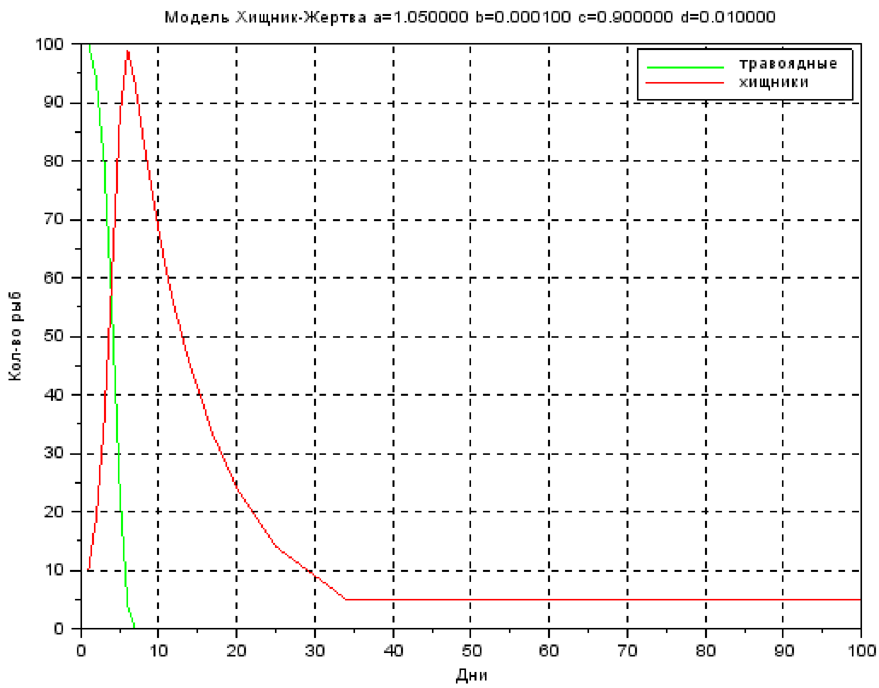
При этом число a должно быть чуть больше 1,
число b должно быть в несколько десятков раз меньше числа a,
число c будет чуть ниже 1,
число d - не больше 1.

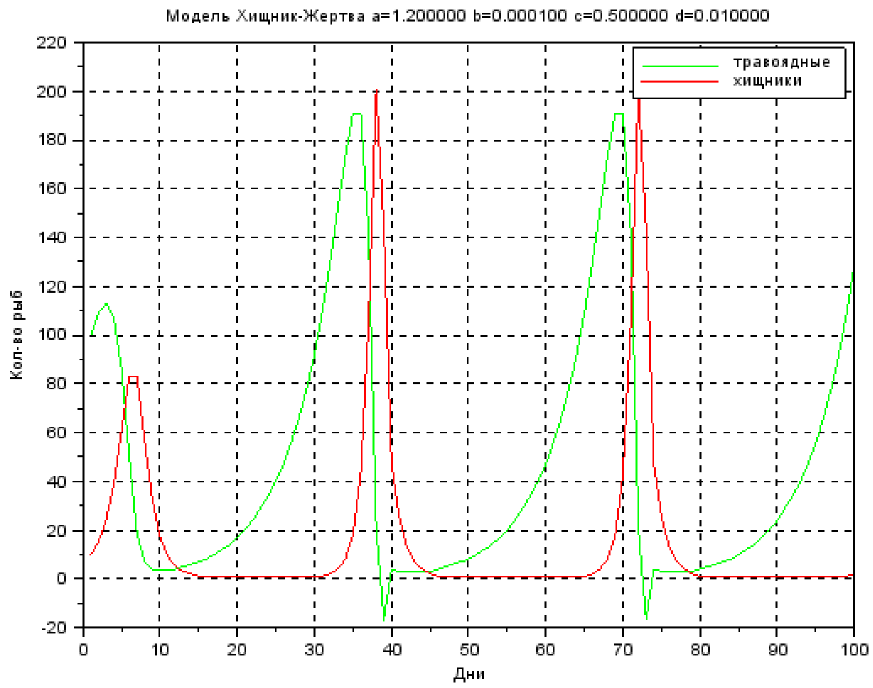
Код реализации в Scilab представлен ниже.

```
function fish(a, b, c, d)
x=zeros(100,0); // Создаёт матрицу, состоящую из нулей
y=zeros(100,0);
x(1)=100;
y(1)=10;
for i=2:100
x(i)=round((a-b*x(i-1))*x(i-1)-d*x(i-1)*y(i-1));
y(i)=round(c*y(i-1)+d*x(i-1)*y(i-1));
end
t=[1:100];
clf;
plot(t, x,'g', t, y,'r');
 set(gca(),"grid",[1 1]);
 xlabel("Дни");
 ylabel("Кол-во рыб");
 legend(['травоядные';'хищники']);
 title(msprintf('Модель Хищник-Жертва a=%f  b=% f c=%f  d=%f' , a, b, c, d));
endfunction
```

Подбирая различные значения a, b , c и d, были получены графики:







На первых двух картинках, у нас были значения смертности хищников 0.8 и 0.9, следовательно, хищники плодились слишком быстро и съели всю рыбу. А на третьем графике данный параметр был снижен до 0.5,и, хищники стали умирать быстрее, поэтому травоядные рыбы успевали плодиться и выжили.

Применение дифференциальных уравнений для решения физических, химических и биологических задач.

Задача о скорости размножения бактерий

Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий. В течение 3 часов их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 часов?

Решение. Пусть x — количество бактерий в момент t. Тогда согласно условию

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Отсюда $x = ce^{kt}$. Из условия известно, что $x|_{t=0} = 100$. Значит,

$$C = 100, \quad x = 100e^{kt}.$$

Из дополнительного условия $x|_{t=3} = 200$. Тогда $200 = 100e^{3k}$, $2 = e^{3k}$, $e^k = 2^{1/3}$.

Искомая функция:

$$x = 100 \cdot 2^{t/3}.$$

Значит, при $t = 9$ $x = 800$, т. е. в течение 9 часов количество бактерий увеличилось в 8 раз.

Задача об увеличении количества фермента

В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его начальному количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение часа удвоилось. Найти зависимость $x(t)$.

Решение. По условию дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

отсюда $x = ce^{kt}$.
Но $x|_{t=0} = a$. Значит, $C = a$, и тогда $x = ae^{kt}$.
Известно также, что $x|_{t=1} = 2a$.
Следовательно, $2a = ae^k$, $e^k = 2 \Rightarrow x(t) = a2^t$.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Задание 1. Решить задачу составив дифференциальное уравнение

Задача о радиоактивном распаде

Скорость распада Ra (радия) в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найти закон радиоактивного распада Ra, если известно, что в начальный момент имелось m_0 Ra и период полураспада Ra равен 1590 лет.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1) $2y''-5y'+2y=0$ Ответ: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{x/2}$

2) $y''-8y'+16y=0$ Ответ: $y=e^{4x}(c_1+c_2x)$

3) $y''+y=0$ Ответ: $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ 4) $y''+8y'+25y=$ Ответ: $y=e^{-4x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$ 2. Найти частное решение:

1) $y``+y`-2y=0$ при $y(0)=1$, $y`(0)=0$. Ответ: $y=2/3e^x+1/3e^{-2x}$

2) $y``-2y`+y=0$ при $y(0)=0$, $y`(0)=1$. Ответ: $y=xe^x$

3. Наэлектризованное изолированное тело вследствие несовершенства изоляции постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда пропорциональна его величине. В начальный момент времени величина заряда равна 100 Кл, а по истечении 10 мин.- 50 Кл. Определить величину заряда через 20 мин. Ответ: q=25 Кл.

4. Тело температурой 25˚С погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0˚С. Зная, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды, определить, за какое время тело охладится до 10˚С, если за 20 мин. оно охлаждается до 20˚С.

Ответ: 82 мин.

5. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 мг препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме после 2 часа? Ответ: 25 мг.

6. Популяция бактерий увеличивается таким образом, что удельная скорость роста в момент t (час) составляет величину 1/(1+2t). Допустим, что начальной популяции соответствует x(0)=1000. Какой будет популяция после 4 часов роста? После 12 часов?

Ответ: 3000; 5000.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 40-85 (с. 505-508).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 6,7 (с. 273-274), 1-19 (с. 295-297)

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.3-9.6 (с. 454-502).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 99-100 (с. 265-272).

Основная литература

п / №	Наименование	Автор (ы)	Год, место издания	Кол-во экземпляров в биб-лиотеке
1	2	3	4	5
1.	Основы высшей математики: учебник	Лобоцкая, Н. Л.	- 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М. : Альянс, 2015. - 479 с.	1144
2.	Теория вероятностей и математическая статистика: учебник	В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова.	3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект : Изд-во МГУ, 2007 - . - (Классический университетский учебник). Ч. 1. - 2007. - 660 с	10
3.	Математические методы в биологии : учебное пособие	Чудновская, Г. В.	Иркутск : Иркутский ГАУ, 2012. — 116 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/ book/156795 (дата обращения: 14.03.2023).	Неограниченный доступ

Дополнительная литература

п/ №	Наименование	Автор (ы)	Год, место издания	Кол-во экземпляров в библиотеке
1	2	3	4	5
1	Математические методы в биологии (математическая статистика) : учебно-методическое пособие—	Абдурахманов, Р. Г.	Махачкала : ДГУ, 2018. — 40 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная	Неограниченный доступ

			система. — URL: https://e.lanbook.com/book/158331 (дата обращения: 14.03.2023).	
2	Математика и математические методы в биологии : учебно-методическое пособие	Галанина, О. В.	Санкт-Петербург : СПбГАУ, 2021. — 133 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/191434 (дата обращения: 14.03.2023).	Неограниченный доступ
3	Математические методы в биологии : учебно-методическое пособие	Иванов, В. И.	Кемерово : КемГУ, 2012. — 196 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/44336 (дата обращения: 14.03.2023).	Неограниченный доступ
4	Методы статистического анализа в медицине и биологии. Примеры и задания	Неустроев Е. П.	Якутск : Издательский дом СВФУ, 2021. - 96 с. - ISBN 9785751332037. - Текст : электронный // ЭБС "Букап" : [сайт]. - URL : https://www.books-up.ru/ru/book/metody-statisticheskogo-analiza-v-medicine-i-biologii-primery-i-zadaniya-14507514/	Неограниченный доступ
5	Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры	Самарский, А. А.	2-е изд., испр. - М. :Физматлит, 2005. - 316 с.	30
6	Задачи по высшей математике,	Шапкин А. С.	4-е изд. - М. :	30

	теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями [Текст]: учеб. пособие		Дашков и К, 2007. - 431 с.	