**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Кафедра медицинской физики с курсом информатики**

# МЕТОДИЧЕСКАЯ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ
## к практическим занятиям

Дисциплина Высшая математика

Специальность 30.05.02 - Медицинская биофизика

Курс 1-2

Семестр I, II, III, IV

Уфа

Рецензенты:

1. Главный врач

ГБУЗ Республиканский кардиологический центр, к.м.н.           Николаева И.Е.

2. Зав.  кафедрой общей физики

Уфимского университета науки и технологий,

д.ф.-м.н., профессор                                                                   Балапанов М. Х.

Автор: доцент Аксенова З.Ф.

Утверждена на заседании № 10 кафедры медицинской физики с курсом информатики, от «18» апреля 2023 г.

Темы:

17. Производная суммы, произведения и частного.
18. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Логарифмическое дифференцирование.
19. Раскрытие неопределенностей, правило Лопиталя.
20. Исследование функции на максимум и минимум. Исследование функции на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Асимптоты кривой. Общая схема построения графика.
21. Дифференциал функции. Аналитический и геометрический смысл дифференциала.
22. Частные производные и полный дифференциал ф.м.п. Дифференцирование ф.м.п. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Частные производные высших порядков. Экстремумы ф.м.п.

1. **Тема занятия № 17 и её актуальность**. Производная суммы, произведения и частного.

Формирование понятия производной исторически связано с двумя задачами: задачей нахождения скорости движения и задачей проведения касательной к кривой. Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин. Производные высших порядков имеют широкое применение в физике.

2. **Учебные цели**: Получение навыков нахождения производных функций. Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- теоремы и формулы для нахождения производных функций;
- правила отыскания производных от функций, полученных из основных элементарных с помощью операций сложения, умножения, деления.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить производные функций;
- использовать таблицу производных от основных элементарных функций для нахождения производных функций.
- решать задачи с использованием производной

**и овладеть** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие производной функции.
2)Производная суммы, разности, произведения, частного функций. 3)Производные от основных элементарных функций.
4)Производная сложной функции.
5)Производная обратной функции.
6)Производная неявной функции.
7)Физический смысл производной.
8)Геометрический смысл производной.
9)Производные высших порядков.
10)Физический смысл производной второго порядка.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.
6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

### 7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1. Производная функции. Определение.
2. Основные правила вычисления производной (производная суммы, разности, произведения и частного двух функций).
3. Производная сложной функции. Правило вычисления. Таблица производных для основных элементарных функций (степенная и показательная функции, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, логарифмическая функция).

### Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

Тест

1.Физический смысл первой производной: производная функции y=f(x) по аргументу x есть
1. мгновенное ускорение переменного движения.
2. мгновенная скорость изменения функции.
2. Угловой коэффициент касательной к графику функции в данной точке равен
1. значению ее производной в точке касания.
2. значению ее второй производной в точке касания.
3. Физический смысл второй производной: вторая производная от пути S по времени t равна
1. мгновенной скорости.
2. мгновенному ускорению переменного движения.
3. работе переменной силы.
4. Производная постоянной величины равна
1. нулю.
2. единице.
3. x.
5. Производная функции y=x равна
1. нулю.
2. $x^2$. 3. единице.

### 7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

**Общее правило нахождения производной**

Операцию отыскания производной некоторой функции называют дифференцированием функции.

**Правила дифференцирования**

1. $C' = 0$, $C$ - постоянная
2. $(x)' = 1$
3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
4. $(uv)' = u'v + v'u$
5. $(Cu)' = Cu'$, $C$ - постоянная
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
7. $y'_x = y'_u u'_x$

**Формулы дифференцирования**

**Основные элементарные функции**

(ln $' \frac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$; $(x^n)' = nx^{n-1}$ x) lna $\sqrt{\ }\ ' \frac{1}{2\sqrt{x}}$ =; ( x) = ; (a ) =a x x ;

$' = e^x$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -$ $' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $'$

$(e^x)$ $' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\sin x$ ; $(tgx)$ $' = -\frac{1}{1+x^2}$; (ctgx) $'$ = - sin x1 $_2$

$' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)$ ; $(arcctgx)$ ; $(arctgx)$

## 7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение. Представим данную функцию в виде произведения: $x^2 = x \cdot x$. Используя теперь правило IV, находим $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' x + x x' = 2x$ поскольку $(x)' = 1$. Итак, $(x^2)' = 2x$ №2. Найти производную функции $y = \ln x + \cos x$.

Решение. Данная функция, представляет собой сумму двух слагаемых. Поэтому, используя правило III и табличные значения получаем

$$y' = (\ln x + \cos x)' = (\ln x)' + (\cos x)' = \frac{1}{x} - \sin x.$$

№3. Найти производную функции $y = x^7 \cdot 2^x$.

Решение. Поскольку заданная функция есть произведение двух сомножителей, то применяя правило IV и табл.формулы, находим

$$y' = (x^{7 \cdot 2^x})' = (x^7)' \cdot 2^x + x^7 \cdot (2^x)' = 7x^6 \cdot 2^x + x^7 2^x \ln 2 = x^6 \cdot 2^x (7 + x \ln 2)$$

№4. Найти производную функции $y = \dfrac{x \cdot \cos x}{1 + 2e^x}$.

Решение. Согласно правилу 4.

$$y' = \frac{(x \cdot \cos x)' \cdot (1 + 2e^x) - x \cdot \cos x \cdot (1 + 2e^x)'}{(1 + 2e^x)^2}$$

Теперь воспользуемся правилами 4, 3, 5 и табличными формулами. В итоге получим

$$y = \frac{((x)' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)') \cdot (1 + 2e^x) - x \cdot \cos x \cdot ((1)' + 2(e^x)')}{(1 + 2e^x)^2} =$$

$$= \frac{(1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)) \cdot (1 + 2e^x) - x \cdot \cos x \cdot 2e^x}{(1 + 2e^x)^2} = \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (1 + 2e^x) - 2x \cdot e^x \cdot \cos x}{(1 + 2e^x)^2}$$

## 7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Найти производные следующих функций:

1. $y = 3x^2 - 2x + 1$; 2. $y = 2^x \sin x - 3^x \cos x$; 3. $y = \dfrac{4 - \ln x}{e^x}$; 4. $y = \sqrt[3]{x} \cdot arctgx + \sqrt{2}$

5. $y = \arcsin x \cdot ctgx$; 6. $y = \dfrac{7}{x} + x^{tgx}$; 7. $y$ sin cos$x$ $e$

## Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-32 (с. 202-205).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1, 2(1-20) (с. 157-158).

## 7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приёмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий, ситуационные задачи.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература**:


1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 5, пар. 5.1 (с. 154-160).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 5, пар. 44-46 (с. 129-136).

1. **Тема занятия № 18 и её актуальность**. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой. Производная сложной функции. Производная обратной сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.

Формирование понятия производной исторически связано с двумя задачами: задачей нахождения скорости движения и задачей проведения касательной к кривой. Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин. Производные высших порядков имеют широкое применение в физике.

2. **Учебные цели**: Получение навыков нахождения производных функций.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- теоремы и формулы для нахождения производных функций;
- правила отыскания производных от функций, полученных из основных элементарных с помощью операций сложения, умножения, деления.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить производные сложной функции;
- решать задачи с использованием производной.

**и овладеть** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие производной функции.
2)Производная суммы, разности, произведения, частного функций.
3)Производные от основных элементарных функций.
4)Производная сложной функции.
5)Производная обратной функции.
6)Производная неявной функции.
7)Физический смысл производной.
8)Геометрический смысл производной.
9)Производные высших порядков.
10)Физический смысл производной второго порядка.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа.

На изучение данной темы, отведено 9 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

## 7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1. Производная функции. Определение.
2. Основные правила вычисления производной (производная суммы, разности, произведения и частного двух функций).
3. Производная сложной функции. Правило вычисления. Таблица производных для основных элементарных функций (степенная и показательная функции, тригонометрические и обрат- ные тригонометрические функции, логарифмическая функция).

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения
темы данного занятия.

**Производная сложной функции**

$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$; $(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$; $(u)' = nu^{n-1}\cdot u'$; $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$;

$(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$; $(e^u)' = e^u\cdot u'$; $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$; $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$;

$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot u'$; $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$; $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$; $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$; $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1: Найти производную функции $y = \sin(3x-5)$. Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**. Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x-5)$ при $x=1$ (вместо единицы может быть любое число). В первую очередь нужно будет выполнить следующее действие: $3\cdot1-5=-2$, поэтому многочлен $3x-5$ и будет внутренней функцией. Во вторую очередь нужно будет найти $\sin(-2)$, поэтому синус – будет внешней функцией. Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что $(\sin x)' = \cos x$. **Все табличные формулы применимы и в том, случае, если «икс» заменить сложным выражением**, в данном случае: $u'(v) = \cos(3x-5)$. Обратите внимание, что внутренняя функция $v = 3x-5$ не изменилась, её мы не трогаем. Результат применения формулы $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так. Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5)\cdot(3x-5)' = \cos(3x-5)\cdot(3-0) = 3\cos(3x-5)$$

Пример 2. Найти производную функции $y = (2x+1)^5$. Повторяем еще раз: **любая табличная формула справедлива не только для «икс», но и для сложного выражения**. Таким образом, результат применения следующий:

правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$

$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)'$. Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$
$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

Пример 3. Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

Пример 5. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2+tgx+15}$. Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2+tgx+15}\right)' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$: Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2+tgx+15}\right)' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(x^2+tgx+15)^{-\frac{2}{3}}(x^2+tgx+15)' =$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+tgx+15)^2}}\left((x^2)'+(tgx)'+(15)'\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+tgx+15)^2}}\left(2x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Пример 6. Найти производную функции $y = -2xe^{3x}+(x^2-4x+3)\sin 7x$.

$$y' = (-2xe^{3x}+(x^2-4x+3)\sin 7x)'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ получаем:

$$y' = (-2xe^{3x}+(x^2-4x+3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x}+x(e^{3x})') + (x^2-4x+3)'\sin 7x + (x^2-4x+3)(\sin 7x)' =$$
$$= -2(1\cdot e^{3x}+x\cdot e^{3x}\cdot(3x)') + (2x-4+0)\sin 7x + (x^2-4x+3)\cos 7x\cdot(7x)' =$$
$$= -2(e^{3x}+3xe^{3x}) + (2x-4)\sin 7x + 7(x^2-4x+3)\cos 7x$$

## 7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 33-64 (с. 202-205).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 2 (21-41), 3 (с. 158).

## 7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий, ситуационные задачи.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература**:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 5, пар. 5.2-5.6 (с. 161-183).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 5, пар. 47-63 (с. 136-157).

1. **Тема занятия № 19 и её актуальность**. Раскрытие неопределенностей, правило Лопиталя.

Теория пределов играет основополагающую роль в математическом анализе, позволяет определить характер поведения функции при заданном изменении аргумента. С помощью предела можно выяснить, имеет ли функция в заданной точке разрыв. Через пределы определяются такие понятия математики как производная, неопределенный и определенный интегралы, составляющие основу дифференциальных уравнений, которые, в свою очередь получили непосредственное применение в медицинской практике. Пределы являются основным средством в построении теории рядов.

2. **Учебные цели**:

-получение навыков нахождения пределов функций; -
изучение геометрического смысла предела функции.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

− понятие предела функции в точке и на бесконечности;
− теоремы о пределах;
− понятие бесконечно малой, бесконечно большой
функции; − виды неопределенностей, способы их
раскрытия; − замечательные пределы.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- вычислять пределы функций в точке и на бесконечности;
− раскрывать неопределенности.

**и овладеть** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1.Определение предела функции в точке;
2.Геометрическая интерпретация предела функции в точке;
3.Определение предела функции на бесконечности;
4.Геометрическая интерпретация предела функции на бесконечности;
5.Непрерывность функции;
6.Теоремы о пределах;
7.Свойства пределов;
8.I замечательный предел;
9.II замечательный предел.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 9 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал (таблицы, графики).

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

**Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения**

Рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены. Для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени**.**

**Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения**

**Общее правило**: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители или умножить числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Решение. Максимальная степень «икса» в числителе: 2. Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1.

($x$ можно записать как $x^1$). Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на $x^2$. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на $x^2$

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}}{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{0} = \infty$$

Пример. Решить предел $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2} \frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$.

Сначала «чистовой» вариант

решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Числитель:

$$8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$$

Знаменатель:

$$x^2+4x-12=0$$
$$D=16+48=64$$
$$\sqrt{D}=8$$
$$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6,\quad x_2=\frac{-4+8}{2}=2$$
$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$
$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$
$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})}=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)}=\frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)}=$$
$$=\frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)}=\frac{-9}{30}=-\frac{3}{10}$$

### 7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи.

1.Вычислить $\lim\limits_{x}\ \dfrac{x^3\quad 3x^2\quad 2x}{2\,x\,6}$

2.Найти $\lim \dfrac{2x^3\quad 3x^2+\ 5\ +}{3x\ 1\ -\ x}$

3.Найти $\lim\limits_{x\ 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$

4.В питательную среду вносят 1000 бактерий. Численность N бактерий возрастает согласно уравнению $N(t)=1000+\dfrac{1000t}{100+t^2}$ (*закон роста*), где t – время в часах. Определить максимальное количество бактерий.

### 7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература**:


1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 4, пар. 4.3 (с. 117-126).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 5, пар. 29 (с. 81- 87).

1. **Тема занятия № 20 и еѐ актуальность**. Исследование функции на максимум и минимум. Исследование функции на выпуклость и вогнутость.Точки перегиба. Асимптоты кривой. Общая схема построения графика.

.

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций. Методы исследования функции широко используются как в теории, так и на практике. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции с помощью производной широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин.

**2.Учебные цели**:

-научиться решать задачи с использованием производной и применять ее для нахождения характеристик для исследования функции.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- нахождение интервалов возрастания и убывания функций;
- исследование функций на максимум и минимум;
- нахождение уравнения касательной к кривой графика функции в некоторой точке.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- вычислять производные функций в точке и на бесконечности;
- использовать таблицу производных от основных элементарных функций для нахождения производных функций.
- исследовать функции и строить графики.

**и овладеть** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1) Определение возрастающей на интервале функции.
2) Определение убывающей на интервале функции.
3) Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале.
4) Определение максимума и минимума функции.
5) Необходимые и достаточные условия существования экстремума дифференцируемой функции.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа. На изучение данной темы, отведено 6 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1) Определение возрастающей на интервале функции.
2) Определение убывающей на интервале функции.
3) Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале.
4) Определение максимума и минимума функции.
5) Необходимые и достаточные условия существования экстремума дифференцируемой функции.

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Функция называется возрастающей на интервале ]a,b[, если для любых точек $x_1$, $x_2$ из этого интервала из условия $x_2>x_1$ следует неравенство
1. $f(x_2)\leq f(x_1)$; 2. $f(x_2)<f(x_1)$; 3. $f(x_2)\geq f(x_1)$;4. $f(x_2)>f(x_1)$
2. Функция называется убывающей на интервале ]a,b[, если для любых точек $x_1$, $x_2$ из этого интервала из условия $x_2>x_1$ следует неравенство
1) $f(x_2)\leq f(x_1)$; 2) $f(x_2)<f(x_1)$; 3) $f(x_2)\geq f(x_1)$;4) $f(x_2)>f(x_1)$
3. Достаточное условие возрастания функции
1)Если производная функции y=f(x) отрицательна на интервале ]a,b[; 2) Если производная функции y=f(x) положительна на интервале ]a,b[.
4. Необходимое условие экстремума
1. f(x)=0; 2. f`(x)=0; 3. f``(x)=0
5. Если в точке $x_1$ производная функции равна нулю и при переходе через точку $x_1$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x_1$ – точка
1. минимума функции; 2. максимума функции.
6. Функция $y=x^2-2$ имеет экстремум в точке
1. x=0; 2. x=1; 3. x=-1; 4. x=2; 5. x=-2
7. Определить интервал возрастания функции $y=x^2+1$
1. (-∞, 0); 2. (0, +∞); 3. (-∞, 1); 4. (1, +∞); 5. (-∞, +∞)
8. Определить интервал убывания функции $y=2x^2+3$
1. (-∞, 3); 2. (3, +∞); 3. (-∞, 0); 4. (0, +∞); 5. (-∞, +∞)

Ответы на тесты:
1.4, 2.2, 3.2,4.2, 5.2, 6.1, 7.2, 8.3 1. Производная второго порядка функции y=cos2x равна:
1. -4cos2x
2. 4cos2x
3. 4sin2x
4. -2sin2x
2. Функция y=x+1:
1. Имеет максимум в точке x=1.
2. Имеет минимум в точке x=1.
3. Не имеет экстремума.
4. Имеет максимум в точке x=0. 3. Четная функция:
1. y=-x
2. y=1+2x
3. y=cos2x
4. y=sin2x

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Функция $y = f(x)$ может убывать или возрастать не во всей своей области определения. Эта область часто распадается на промежутки, в одних из которых функция убывает, в других — возрастает.

Точка $x_0$, отделяющая промежуток возрастания от промежутка убывания и принадлежащая области определения функции, называется точкой экстремума.

Точки экстремума бывают двух типов: точки максимума функции, где функция переходит от возрастания к убыванию (рис. 2.13; точки $x_1$ и $x_3$) и точки минимума (см. рис. 2.13; точки $x_2$ и $x_4$), где функция переходит от убывания к возрастанию.

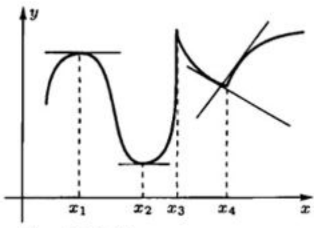


**Рис. 2.13.** Точки экстремума.

В точках максимума величина $f(x)$ больше, а в точках минимума — меньше, чем во всех соседних достаточно близких точках. точки, в которых функция имеет экстремумы, надлежит искать среди точек, в которых:

1) $f'(x) = 0$ либо
2) $f'(x) = \infty$ либо
3) $f'(x)$ не существует, причем предполагается, что точки эти принадлежат области определения функции. Точки указанных типов называются критическими точками I рода.

Отметим, что не в каждой критической точке функция имеет экстремум.

Пример. $y = x^3$.

$$y' = 3x^2.$$

Точка $x = 0$ будет для данной функции критической точкой I рода, так как $y'(0) = 0$. Однако в этой точке экстремума нет (рис. 2.15).

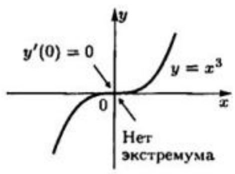


**Рис. 2.15.** Кубическая парабола.

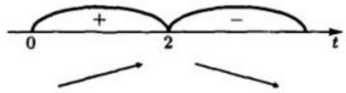
7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

**Пример.** Дано уравнение прямолинейного движения точки $x = 6t^2 - t^3$ ($t$ — в секундах, $x$ — в метрах). Найти наибольшую скорость точки.

**Решение.** Скорость точки $v = x'(t) = 12t - 3t^2$. Исследуем, когда $v = v_{max}$. Итак, нужно найти наибольшее значение функции $v(t) = 12t - 3t^2$ при $t \in (0, +\infty)$.

На данном промежутке $v(t)$ дифференцируема и $v'(t) = 12 - 6t$. Найдем критические точки I рода: $v'(t) = 0$, т. е. $12 - 6t = 0$, откуда $t = 2$.

Так как в окрестности точки $t = 2$ изменился знак $v'(t)$, то в точке $t = 2$ — экстремум, причем изменение знака произошло с «+» на «−», и, следовательно, $t = 2$ — точка максимума.




Тогда $v(2) = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 12$ (м/с) — максимальное значение скорости.

Точка $x_0$, принадлежащая области определения функции, называется критической точкой второго рода, если в этой точке выполняется одно из 3 условий:

1) $f''(x_0) = 0$ либо
2) $f''(x_0) = \infty$ либо
3) $f''(x_0)$ не существует.

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода. Но не всякая критическая точка второго рода является

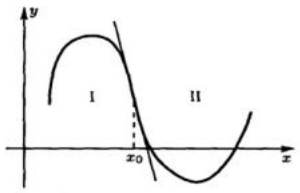



**Рис. 2.20.** Точки перегиба как границы промежутков выпуклости и вогнутости.

точкой перегиба. Однако если $x_0$ — критическая точка второго рода и в ее окрестности изменяется знак второй производной, то точка $x_0$ — точка перегиба.

Пример 2. Покажем исследование функции с помощью производной на примере $y=2x^3-6x$.

1. Найдем область определения функции. Область определения функции – вся числовая ось.
2. Найдем производную и, приравняв ее нулю, решим уравнение y`=0. $y` = 6x^2 – 6 = 0$ $6(x^2 - 1) = 0$ $x^2= 1$

Отсюда $x_1=1$, $x_2=-1$. Итак, экстремум может быть в точках: $x_1=1$ и $x_2=-1$. Подсчитаем значения функции в этих точках: $x_1=1$, $y_1=-4$; $x_2=-1$, $y_2=4$.

3. Нужно узнать, имеет функция в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$ максимум или минимум, или вообще не имеет экстремума. Для этого необходимо исследовать знак первой производной в окрестностях критических точек. Рассмотрим точку $x_1=1$. Слева от нее производная отрицательна, а справа положительна. Следовательно, при переходе через точку $x_1=1$ производная меняет знак с – на +. Значит, $x_1=1$ – точка минимума функции. Рассмотрим точку $x_2=-1$. Слева от нее производная положительна, справа отрицательна. Так как производная меняет знак с + на -, то $x_2=-1$ – точка максимума.

## 7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1.Исследовать функцию с помощью производной

1) $y = x^3 + 2x^2 - 1$

2) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$

3) $y = x^3 - 5x^2 + 8x$

4) $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$

**1.** $y = \frac{x^2}{x^2-9}$. **2.** $y = \sqrt[3]{1-x^2}$. **3.** $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

**4.** $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$. **5.** $y = \frac{x^3}{x^2-1}$. **6.** $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$.

**7.** $y = \frac{x^2+4}{x}$. **8.** $y = \frac{1-2x}{x^2}$. **9.** $y = \frac{4-x^3}{x^2}$.


1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 136-150 (с. 210-211).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-3 (с. 197).


## 7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

**Задание 1**. Установите верную последовательность:

1) Определить наибольшее и наименьшее значение функции;
2) Найти значение функции в точках $x_1$ и $x_2$;
3) Найти производную функции;
4) Приравнять производную к нулю и найти еѐ корни;
5) Определить смену знака производной при прохождении через точки $x_1$ и $x_2$; 6) Определить вид экстремума.

Правильные ответы: 342561

**Задание 2**. Установите соответствие между функцией и еѐ производной

| 1 вариант | | 2 вариант | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
| 1) $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ | 1) $f'(x) = \frac{1}{3x^2}$ | 1) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ | 1) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$ |
| 2) $f(x) = x + x^3$ | 2) $f'(x) = -3x^2$ | 2) $f(x) = x - x^2$ | 2) $f'(x) = -4x^3$ |
| 3) $f(x) = 6\sqrt{x}+1$ | 3) $f'(x) = 6x + 6$ | 3) $f(x) = 4\sqrt{x}-2$ | 3) $f'(x) = 4x - 7$ |
| 4) $f(x) = 5 - \frac{1}{3x}$ | 4) $f'(x) = \frac{3}{x}$ | 4) $f(x) = 2 + \frac{1}{2x}$ | 4) $f'(x) = \frac{2}{x}$ |
| 5) $f(x) = 2 - x^3$ | 5) $f'(x) = 1 + 3x^2$ | 5) $f(x) = 3 - x^4$ | 5) $f'(x) = 1 - 2x$ |

Правильные ответы: 1-3; 2-5; 3-4; 4-1; 5-2

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

## 8. Литература:


1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 5, пар. 5.7-5.8 (с. 183-198).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 6, пар. 69-73 (с. 177-191).

**1. Тема занятия № 21 и её актуальность**. Дифференциал функции. Аналитический и геометрический смысл дифференциала.

Применение производной позволяет более эффективно решать многие задачи повышенной сложности. Это требует от учащихся нетрадиционного мышления и способствует развитию нового, нешаблонного мышления, которое можно успешно применять также и в других сферах человеческой деятельность (вычислительная техника, экономика, физика, химия и т.д.)

**2.Учебные цели**:

- рассмотреть методику решения задач прикладного характера, - применять ранние полученные знания, - выделять этапы в решении прикладных задач.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- методы исследования функции с помощью производной.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- применять производные для нахождения точек экстремума функции;
- применять производные для нахождения интервалов возрастания, убывания функции;
- применять производные для нахождения точек перегиба функции;
- применять производные для нахождения интервалов выпуклости, вогнутости функции; - выполнять построение графика функции.

**и овладеть** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Заполнить таблицу

| | |
|---|---|
| Уравнение пути ($м$) | $S = 3t^3 - 6t^2 + 5t - 2$ |
| Уравнение скорости ($м/с$) | |
| Уравнение ускорения ($м/с^2$) | |
| Время $t_0(с)$ | $t_0 = 2$ |
| Значение скорости в момент времени $t_0$ ($м/с$) | |
| Значение ускорения в момент времени $t_0$ ($м/с^2$) | |

2. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшения температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что Х обозначает дозу назначенного лекарства, У - функция степени реакции описывается функцией $y=R(x)=x^2(a-x)$, где а - некоторая положительная постоянная. При каком значении Х реакция максимальна?

## 7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

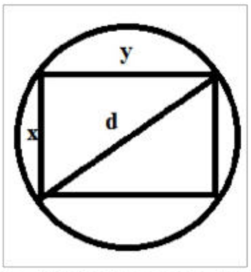
Математика является одной из самых древних наук, но роль ее в различных областях естествознания в разное время была неодинаковой. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его основные черты и свойства на языке математических понятий и соотношений, т.е. возможность построить математическую модель изучаемого объекта. Математическая модель, основанная на некотором упрощении, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако, благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг факторов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как ведет себя объект в различных условиях. Математические модели успешно применяются в физике, химии, биологии, экономике, помогают увидеть силу межпредметных связей, важную роль математики, дающей мощный аппарат для решения многих задач, которые выдвигаются и успешно решаются в различных областях науки и практики.

## 7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Задача 1. Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать стойку прямоугольного сечения с наибольшей площадью. Наибольшая площадь сечения балки необходима для использования большей нагрузки.

Решение.

1) Представим математическую модель




2) Введём переменные: x- ширина, y - длина прямоугольника. Выразим y через x по теореме Пифагора: $y = \sqrt{d^2 - x^2}$   $y = \sqrt{d^2 - x^2}$

3) Выразим площадь прямоугольника $S = x \cdot y = x\sqrt{d^2 - x^2}$

4) Найдём производную площади: $S' = x'\sqrt{d^2 - x^2} + x\left(\sqrt{d^2 - x^2}\right)' = \frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}$

5) Определим критические точки $S' = 0$

$\frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}} = 0,\ d^2 - 2x^2 = 0.\ 2x^2 = d^2, x = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

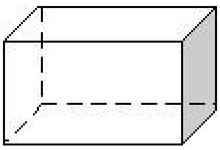
2

В точке $x = \frac{d\sqrt{2}}{2}$ производная меняет знак с "+" на "-", следовательно это точка максимума. В этой точке площадь прямоугольника будет наибольшей.

$y = \sqrt{d^2 - x^2} = \sqrt{d^2 - \frac{2d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$ , x = y

$S = x \cdot y = \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d^2}{2}$

Ответ: Сечение балки должно быть квадратом со стороной $\frac{d\sqrt{2}}{2}$.



Задача 2. Заводу поручено изготовить резервуар емкостью 4м$^3$ открытый сверху с квадратным основанием. При этом внутренняя поверхность должна быть покрыта оловом. Какими следует выбрать размеры резервуара, чтобы на его покрытие было израсходовано наименьшее количество олова? Решение.

1. Выявить величину, о наибольшем или наименьшем значении которой говорится в задаче. Sпов. – наименьшая Sпов.=Sосн+Sбок=$AB^2+4AB\cdot AA_1$

2. Ввести переменную, задание которой определяет величину, указанную в задаче.

Пусть AB=x. Тогда $V=x^2\cdot AA_1$,

$$AA_1 = \frac{V}{x^2} = \frac{4}{x^2}$$

3. Указать допустимые значения для переменной. x>0

4. Выразить величину из пункта 1 как функцию переменной x.

4. $S(x)=x^2+4\cdot x \cdot \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$

5. Найти наибольшее или наименьшее значение функции (п.4) на интервале, указанном в п.3.

5.

$$\frac{16}{x^2} = \frac{2x^3-16}{x^2}$$

$S'(x)=0$; $2x^3-16=0$ x=2

На интервале (0; +∞) функция S(x) определена и непрерывна и имеет единственную стационарную точку x=2 – т. min. Значит, min S(x)=S(2)

(0; +∞)

Следовательно, чтобы на покрытие резервуара ушло наименьшее количество олова, его размеры должны быть равны AB=AD=2 (м), $AA_1$=1 (м). Ответ: 2x2x1.

***Задача 2.*** В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по

закону $P(t)=1000+\frac{1000t}{100+t^2}$, где t– выражается в часах.
Найти максимальный размер этой популяции.
Решение: найдем наибольшее значение функции p(t) на интервале (0; +∞).

$$p'(t)=\left(1000+\frac{1000t}{100+t^2}\right)'=\frac{1000(100+t^2)-1000t\cdot 2t}{(100+t^2)^2}=\frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2};$$

$p'(t)=0$; $100-t^2=0$; $t=\pm 10$

На интервале (0; +∞) функция p(t) определена и непрерывна, и имеет единственную стационарную точку t=10 – т.max.

Значит max p(x)=p(10)= $1000+\frac{1000\cdot 10}{100+10^2}=1050$

Ответ: максимальный размер популяции составляет 1050 особей и достигается по прошествии 10 часов роста.

***Задача 3.*** Стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. При обработке бриллиант массой 25 карат был расколот на две части. Каковы массы частей, если известно, что при этом произошла максимальная потеря стоимости?

Решение: стоимость бриллианта $p=k\cdot m^2$, т.е. $p=625k$.

Пусть x – масса одного куска бриллианта, образовавшегося при расколе.
Тогда (25-x) – масса другой части.
$kx^2$ – стоимость одной части, а $k(25-x)^2$ – стоимость другой части, где $0<x<25$. $f=625k-kx^2-k(25-x)^2$ – потеря стоимости бриллианта в результате раскола (k – коэффициент пропорциональности). Рассмотрим функцию: $f(x)=625k-kx^2-k(25-x)^2$ и найдем ее наибольшее значение на интервале (0; 25).
$f'(x)=-2kx+2k(25-x)=-4kx+50k$ $f'(x)=0$; $-4kx+50k=0$;
$-4x=-50$; $x=12{,}5$
На интервале (0; 25) функция f(x) определена и непрерывна, и имеет единственную стационарную точку x=12,5 - т. max. Значит, max f(x)=f(12,5). Следовательно, масса частей 12,5 карат и 12,5 карат. Ответ: $m_1=m_2=12{,}5$ карат.

## 7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Самостоятельная работа: решите задачу по вариантам

Вариант 1. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки берега А. Пассажир лодки желает достигнуть села «В», находящегося на берегу на расстоянии 5 км от А. Лодка проплывает по 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села «В» в кратчайшее время?

Вариант 2. Человек, гуляющей в лесу, находится в 5 км от прямолинейной дороги и в 13 км от дома, стоящего у дороги. Скорость его передвижения в лесу 3км/ч, а по дороге – 5 км/ч. Найдите наименьшее время, за которое он сможет прийти домой.

Типовые задачи.

1. Из шара радиуса R выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы его размеры?

Ответ: высота равна $2R\sqrt{3}/3$, диаметр равен $2R\sqrt{6}/3$. 1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 70-76 (с. 206-207). 2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 5-12 (с. 197).

## 7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература**:

1. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 9, пар. 75 (с. 194-196).

1. **Тема занятия № 22 и еѐ актуальность**. Частные производные и полный дифференциал ф.м.п. Дифференцирование ф.м.п. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Частные производные высших порядков. Экстремумы ф.м.п.

Таким же важным, как и понятие производной в математическом анализе, является и понятие дифференциала функции. В приложениях математики к решению конкретных задач приходится иметь дело с величинами, числовые значения которых получены путем измерений и, следовательно, точное их значение неизвестно. Если исходные данные содержат погрешности измерений, то применение точных методов вычислений нецелесообразно. Для упрощения и облегчения вычислений в таких случаях лучше использовать приближенные методы. Теоретической основой одного из простейших приѐмов приближенных вычислений является понятие дифференциала

**2.Учебные цели**:

- Получение навыков нахождения дифференциалов функций.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- понятие дифференциала функции;
- понятие полного и частного дифференциала;
- формулу приближенных вычислений значений функции в точке с помощью дифференциала.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить дифференциал функции;
- применять формулу приближенных вычислений значения функции;
- находить частные и полный дифференциалы функции многих переменных

**и овладеть** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1. Понятия приращение функции, приращение аргумента.
2. Определение дифференциала функции.
3. Формула приближенных вычислений значения функции.

4. **Вид занятия**: практическое занятие.
5. **Продолжительность занятия:** 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 6 академических часа по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. **Оснащение**:
   6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.
   6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.
7. **Содержание занятия:**

## 7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1. Выберите верные утверждения:
1) дифференциал аргумента и приращение аргумента равны, 2)
дифференциал аргумента и приращение аргумента приближенно
равны,
3) дифференциал функции и приращение функции равны,
4) дифференциал функции и приращение функции приближенно равны.

2. Задана функция $y = x^2$ и начальное значение аргумента $x_0 = 3$. Аргументу задано приращение $\Delta x = 0{,}005$. Выберите действия и установите их последовательность при вычислении приближенного приращения функции:

   1. $y(3) = 3^2 = 9$
   2. $y' = 2x$
   3. $\Delta y \approx dy = 6 \cdot 0{,}005 = 0{,}03$
   4. $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

3. Установите соответствие между функцией и записью вычисления ее значения в точке 1,996

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $y = x^3$ | а) | $\frac{1}{1{,}996^3}$ |
| 2) | $y = x^{\frac{1}{3}}$ | б) | $1{,}996^3$ |
| 3) | $y = x^{-3}$ | в) | $\sqrt[3]{1{,}996}$ |

4. Необходимо вычислить при помощи дифференциала приближенное значение функции $y = x^3 + 2x$ при $x = 4{,}025$. Следуя формуле (4.7) заполните пропуски и вычислите приближенно значение функции:

   1. $x = 4{,}025 = 4 + 0{,}025,$ $x_0 = \boxed{\phantom{00}}$ $\Delta x = \boxed{\phantom{00}}$
   2. $y(x_0) = \boxed{\phantom{00}}$
   3. $y' = (x^3 + 2x)' = \boxed{\phantom{00}}$
   4. $y'(x_0) = \boxed{\phantom{00}}$
   5. $y(4{,}025) \approx \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{00}}$

5. Частный дифференциал $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции $u = x^6 y + 2x$ имеет вид:

   1. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 + 2)dx$
   2. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 y + 2)dx$
   3. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (x^6 + 2x)dx$
   4. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 + 2)dx$

*Эталон ответов:*

1. 1,4
2. 2,4,3
3. 1-б, 2-в, 3-а
4.
   1) $x = 4{,}025 = 4 + 0{,}025,$ $x_0 = \boxed{4}$ $\Delta x = \boxed{0{,}025}$
   2) $y(x_0) = \boxed{4^3 + 8 = 72}$
   3) $y' = (x^3 + 2x)' = \boxed{3x^2 + 2}$
   4) $y'(x_0) = \boxed{3 \cdot 4^2 + 2 = 50}$
   5) $y(4{,}025) \approx \boxed{72} + \boxed{50} \cdot \boxed{0{,}025} = \boxed{73{,}25}$
5. 2.

1) Вычислите приращение функции y=f(x), если задано начальное значение $x_0$ и аргумент изменился на $\Delta x$.

а). $y=\frac{x\sqrt{x}-5x^3+x}{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}02$

б). $y=\frac{3x^2-2x-4}{2x-1}$, $x_0=2$, $\Delta x=0{,}009$

в). $y=x^3\cdot(1-\cos x)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $\Delta x=0{,}04$

Ответы:

а) $\Delta y\approx -0{,}019$;

б) $\Delta y\approx 0{,}022$;

в) $\Delta y\approx 0{,}24\pi^2$

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1.Дифференциал функции $y=tg^2x$ равен

1. $\frac{2tgx}{\sin^2 x}dx$ 2. $\frac{2}{\sin x}dx$ 3. $\frac{2tgx}{\cos^2 x}dx$ 4. $\frac{tgx}{\sin^2 x}dx$ 5. $\frac{2}{\cos^2 x}dx$

2.Дифференциал функции $y=3x^2+x$ равен

1.$(6x+1)dx$ 2.$(3x+1)dx$ 3.$6xdx$ 4.$(x^3+\frac{x^2}{2})dx$ 5. $(3x+\frac{x^2}{2})dx$

3.Дифференциал второго порядка функции $y=e^{2x}$ равен

1.$e^{2x}dx^2$ 2.$2e^{2x}dx^2$ 3.$4e^{2x}dx^2$ 4.$8e^{2x}dx^2$ 5.$16e^{2x}dx^2$

Ответы на тесты: 1.3, 2.1, 3.3

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Наряду с понятием производной одним из основных понятий дифференциального исчисления является понятие дифференциала функции.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке $x_0$, называется произведение производной этой функции в точке $x_0$ на приращение независимой переменной.

Для обозначения используют символ $df(x_0)$ или, короче, $dy$. Итак, $dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$, где $\Delta x$ - приращение независимой переменной.

Для независимой переменной $x$ полагают $dx=\Delta x$

(Это согласуется с тем, что для случая функции $y=x$, $dy=dx=(x)'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$)

Учитывая, что $dx=\Delta x$, выражение дифференциала можно представить в следующем виде: $dy=f'(x)dx$.

Отметим, что из последнего равенства имеем: $f'=\frac{dy}{dx}$.

Из определения дифференциала функции вытекает способ его вычисления. Очевидно, чтобы вычислить дифференциал функции, нужно ее производную умножить на $dx$. Отсюда следует, что правила нахождения дифференциала остаются теми же, что и для нахождения производных.

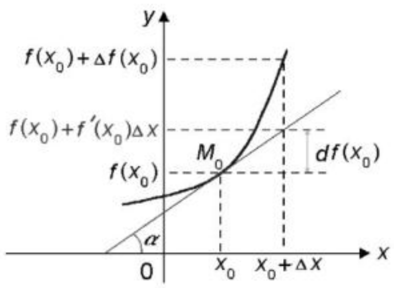
***Ключевые понятия и формулы***

**Дифференциалом функции** $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на приращение аргумента. Обозначается $dy$.

$$\boldsymbol{dy = y'\Delta x = y'dx} \quad \text{– дифференциал функции } y = f(x) \text{ по переменной } x \qquad \textbf{(4.1)}$$

$$\boldsymbol{dx = \Delta x, dy \approx \Delta y} \qquad \textbf{(4.2)}$$

**Геометрическая интерпретация дифференциала функции**




**Свойства дифференциала функции:**

*1) дифференциал постоянной:* $dc = 0$;

*2) дифференциал суммы:* $d(u+v) = du \; dv$;

*3) дифференциал произведения.* $d(uv) = vdu \; udv$;

*4) дифференциал частного.* $d\frac{u}{v} = \frac{vdu \; udv}{v^2}$;

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

***Пример 1.***

Вычислите приближенно приращение функции $y = \frac{x+1}{x^2}$, если аргумент изменился с $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}028$

*Решение*: приращение функции приближенно равно дифференциалу функции:

$$\Delta f(x) \approx dy = y'\Delta x = \left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)' = \frac{(x^2+1)'x^3 - (x^2+1)(x^3)'}{x^6}\Delta x$$

$$= \frac{2x \cdot x^3 - 3x^2(x^2+1)}{x^6}\Delta x = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6}\Delta x = \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6}\Delta x$$

$$= \frac{x^2(-x^2-3)}{x^6}\Delta x = \frac{-x^2-3}{x^4}\Delta x$$

Вычислим значение дифференциала при $x_1 = 1$ и $\Delta x = 1{,}003 - 1 = 0{,}003$

$$\Delta f(x) \approx dy| \ldots = \frac{-1^2-3}{\ldots} \cdot 0{,}028 = -4 \cdot 0{,}028 = -0{,}112$$

*Отве*… …ось на 0,112 при перехо-

де ар…

…$= x^2 \cdot lny$.

*Решение:*

Полный дифференциал записывается в виде $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Найдем частные дифференциалы:

Дифференциал функции $u$ по переменной $x$: т.е. $y$ принимается за постоянную величину, а, следовательно, и $lny$ – постоянная величина.

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx = (x^2 \cdot lny)'_x dx = lny \cdot (x^2)'_x dx = 2x\, lny\, dx$$

Дифференциал функции $u$ по переменной $y$: т.е. $x$ принимается за постоянную величину, а, следовательно, и $x^2$ – постоянная величина.

$$\frac{\partial u}{\partial y}dy = (x^2 \cdot lny)'_y\, dy = x^2(lny)'_y\, dy = x^2 \cdot \frac{1}{x}dy = x\, dy$$

Тогда полный дифференциал $du = 2x\, lny\, dx + x\, dy$

*Ответ*: $du = 2x\, lny\, dx + x\, dy$

Пример 3. Найти дифференциал функции $y = \sin\sqrt{x^2+1}$.

Решение. $y' = \frac{x \cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, в общем виде

Учитывая, что получим:

$$dy = \frac{x \cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \Delta x \quad \text{или} \quad dy = \frac{x \cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Очевидно, чтобы вычислить дифференциал функции, нужно её производную умножить на $dx$. Отсюда следует, что правила нахождения дифференциала остаются теми же, что и для нахождения производной.

**Приложение дифференциала функции**

**к приближенным вычислениям значения функции**

Формула приближенного вычисления значения функции

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (4.7)$$

Алгоритм приближенного вычисления значения функции в точке $x$:

1. Представить $x$ в виде суммы $x_0$ и $\Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, $x_0$ – должно быть как можно ближе к заданному значению $x$ и значение функции в точке $x_0$ вычисляется точно.
2. Вычислить $f(x_0)$
3. Найти производную заданной функции в точке $x_0$.
4. Полученные значения подставить в формулу приближенных вычислений.

Из основной формулы приближенных вычислений выводятся следующие формулы:

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n}\Delta x \qquad (4.8)$$

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n x_0}\Delta x \quad \text{при } x \neq 0 \qquad (4.9)$$

$$(1+\Delta x)^k \approx 1 + k\Delta x, \qquad k \in Z \qquad (4.10)$$

$$(x_0+\Delta x)^k \approx x_0^{\,k} + k x_0^{\,k-1}\Delta x \qquad (4.11)$$

$dy$

**Пример 3.**

Вычислите приближенно значение функции $y = 2x^5 - x^3 - 1$ при $x = 2{,}025$

*Решение*: воспользуемся алгоритмом приближенного вычисления значения функции:

1) представим $x$ в виде суммы $x = x_0 + \Delta x$, т.е. $x = 2{,}025 = 2 + 0{,}025$, где $x_0 = 2, \Delta x = 0{,}025$;

2) вычислим $f(x_0) = f(2) = 2 \cdot 2^5 - 2^3 - 1 = 64 - 8 - 1 = 55$

3) найдем производную заданной функции: $y' = (2x^5 - x^3 - 1)' = 10x^4 - 3x^2$ и вычислим ее значение в точке $x_0 = 2$: $y'(2) = 10 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 = 160 - 12 = 148$

4) подставим значения в формулу приближенных вычислений 4.7.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$f(2{,}025) = f(2 + 0{,}025) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0{,}025 = 55 + 148 \cdot 0{,}025 = 55 + 3{,}7 = 58{,}7$$

*Ответ*: значение функции $y = 2x^5 - x^3 - 1$ при $x = 2{,}025$ приближенно равно 58,7

## 7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

### Типовые задачи.

1. Найти производную функции и полный дифференциал:

а) $y = 5x\ln x$; б) $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; в) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$;

2. Найти дифференциал функции. $y = \arcsin(1 - x^2)$

Ответ: $dy = -\dfrac{2dx}{\sqrt{2 - x^2}}$

3. $y = x^3 \ln(1 - x^2)$

Ответ: $dy = \left(3x^2 \ln(1 - x^2) - \dfrac{2x^4}{1 - x^2}\right)dx$

Найти дифференциал второго порядка функции.

1. $y = 2x^3 + 5x^2$

Ответ: $d^2y = (12x + 10)dx^2$

2. $y = 5^x + x^3$

Ответ: $d^2y = (5^x \ln^2 5 + 6x)dx^2$

13.Дифференциал функции $y = \mathrm{tg}^2 x$ равен

1. $\dfrac{2\mathrm{tg}x}{\sin^2 x}dx$ 2. $\dfrac{2}{\sin^2 x}dx$ 3. $\dfrac{2\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}dx$ 4. $\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sin^2 x}dx$ 5. $\dfrac{2}{\cos^2 x}dx$

14.Дифференциал функции $y = 3x^2 + x$ равен

1. $(6x + 1)dx$ 2. $(3x + 1)dx$ 3. $6xdx$ 4. $\left(x^3 + \dfrac{x^2}{2}\right)dx$ 5. $\left(3x + \dfrac{x^2}{2}\right)dx$

15.Дифференциал второго порядка функции $y = e^{2x}$ равен

1. $e^{2x}dx^2$ 2. $2e^{2x}dx^2$ 3. $4e^{2x}dx^2$ 4. $8e^{2x}dx^2$ 5. $16e^{2x}dx^2$

3. Дифференциал функции y=6sin(2x) равен

1. $6\cos(2x)dx$
2. $12\sin x dx$
3. $6\cos(2x)dx$
4. $12\cos(2x)dx$
5. $-12\sin(2x)dx$

Ответы на тесты:

13.3, 14.1, 15.3

Найти производные первого порядка:

1. $y = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - x$

$$' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2\sqrt[3]{x^2}} - 1$$

$= (x^3 + 1)tgx$

$$' = 2xtgx + \frac{x^3 + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\ln x + x}{x}$$

$$' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$= 2^x + x^3 ctgx$

$$' = 2^x \ln 2 + 3x^2 ctgx - \frac{x}{\sin^2 x}$$

$= \sin^3(x^2 + 1)$

$' = 6x\sin^2(x^2 + 1)\cos(x^2$

$= \cos^2 6x$

$' = -6\sin 12x$

$= 6\arccos 2x + 3\arcsin 5x$

$$' = \frac{-12}{\sqrt{1 - 4x^2}} + \frac{15}{\sqrt{1 - 25x^2}}$$

$$= \ln\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

$$' = -\frac{4x}{1 - x^4}$$

$= 3e^{x^3 + x}$

$' = 3e^{x^3 + x}(3x^2 + 1)$

${}^3 + y^3 - 5 = 0$

$$' = -\frac{x^2}{y^2}$$

${}^y + x^3 = y^2$

$$' = \frac{3x^2}{2y - e^y}$$

Найти производную второго порядка функции.

$= 2e^{-x^3}$

$'' = 6xe^{-x^3}(3x^3 - 2)$

$= 2\cos^2 x$

$'' = -4\cos 2x$

Найти дифференциал функции.

$= \arcsin(1 - x^2)$

$$= \frac{-2dx}{\sqrt{2 - x^2}}$$

2. $y = x^3 \ln(1 - x^2)$

Ответ: $y$

2\. $y$

Ответ: $y$

3\. $y$

Ответ: $y$

4\. $y$

3

Ответ: $y$

5\. $y$

Ответ: $y$ $+1)$

6\. $y$

Ответ: $y$

7\. $y$

Ответ: $y$

8\. $y$

Ответ: $y$

9\. $y$

Ответ: $y$

10\. $x$

Ответ: $y$ 11.$e$

Ответ: $y$

1\. $y$

Ответ: $y$

2\. $y$

Ответ: $y$

1\. $y$

Ответ: $dy$

4

$$-x^2)-\frac{2x}{1-x^2}$$

Ответ: $dy = (3x^2 \ln(1) dx$

Найти дифференциал второго порядка функции.

1. $y = 2x^3 + 5x^2$

Ответ: $d^2y = (12x + 10)dx^2$

2. $y = 5^x + x^3$

Ответ: $d^2y = (5^x \ln^2 5 + 6x)dx^2$

**1 уровень**

**Выберите правильный ответ:**

1.Физический смысл первой производной: производная функции y=f(x) по аргументу x есть
1. мгновенное ускорение переменного движения.
2. мгновенная скорость изменения функции.
2. Угловой коэффициент касательной к графику функции в данной точке равен
1. значению ее производной в точке касания.
2. значению ее второй производной в точке касания.
3. Физический смысл второй производной: вторая производная от пути S по времени t равна
1. мгновенной скорости.
2. мгновенному ускорению переменного движения.
3. работе переменной силы.
4. Производная постоянной величины равна 1. нулю.
2. единице.
3. x.
5. Производная функции y=x равна
1. нулю.
2. $x^2$.
3. единице.

6. Производная функции $y = \sin x^2$ равна

1. $\cos x^2$
2. $x \cos x$
3. $2x \cos x^2$
4. $2x \sin x$
5. $2x \cos x$

7. Производная функции $y = \sqrt{x^4 + 1}$ равна
1. $4x^3 \dfrac{}{\sqrt{x^4+1}}$.
2. $2x^3 \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$.
3. $\dfrac{1}{2\sqrt{x^4+1}}$.
4. $\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$.
5. $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4+1}}$.

1

8. Вторая производная функции $y = \sin 4x$ равна 1. $4\cos 4x$ .
2. $16\sin 4x$.
3. $16\cos 4x$ .

4. $-16\cos 4x \sin 4x$.

5. $-16\sin 4x$.

9. Производная функции $y = \cos^3 x$ равна 1. $3\cos x \sin x$ .

2. $3x\cos^2 x$ .

3. $-3\cos^2 x \sin x$ .

4. $3\cos^2 x \sin x$ .

5. $3\cos x \sin^2 x$ .

10. Производная функции $y = tg2x$ равна

1. $\frac{2}{\cos^2 2x}$ .

2. $\frac{2}{\sin^2 x}$ .

3. $\frac{2}{\cos x}$ .

4. $\frac{2}{\sin x}$ .

5. $\frac{2}{\cos x \sin x}$

11. Производная произведения двух функций равна

1. $u`v - uv`$

2. $uv + uv`$

3. $u`v - uv$

4. $uv + uv`$

5. $u`v + uv`$

12. Производная частного двух функций равна

1. $\frac{u`v + uv`}{v^2}$

2. $\frac{u`v - uv}{v^2}$

3. $\frac{u`v - uv`}{v^2}$

4. $\frac{u`v - uv`}{v}$

5. $\frac{uv - u`v}{v}$

13. Дифференциал функции $y = tg^2 x$ равен

1. $\frac{2tgx}{\sin^2 x} dx$

2. $-\frac{2}{\sin^2 x} dx$ $2tgx$

3. $\underline{\qquad}\cos^2 x\,dx\ tgx$

4. $\underline{\qquad}\sin^2 x\ dx$

$2$

5. $\underline{\qquad}\cos^2 x\,dx$

14.Дифференциал функции $y = 3x^2 + x$ равен

1.$(6x + 1)dx$

2.$(3x + 1)dx$

3.$6xdx$

4.$\left(x^3 + x^2 + \frac{2}{x^2}\right)dx$

5.$(3x)dx$

$2$

15. Дифференциал второго порядка функции $y = e^{2x}$ равен

1.$e^{2x}dx^2$

2.$2e^{2x}dx^2$ 3.$4e^{2x}dx^2$

4.$8e^{2x}dx^2$

5.$16e^{2x}dx^2$

Ответы на тесты:

1.2, 2.1, 3.2, 4.1, 5.3, 6.3, 7.2, 8.5, 9.3, 10.1, 11.5, 12.3, 13.3, 14.1, 15.3

Типовые задачи.

1. Найти дифференциал функции.

$y = \ln \sin x$

$= \operatorname{arctg} 2^{3x}$

$= \operatorname{tg} 4x$

$= \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

$y = x^2 \sin \sqrt{x}$

$= e^{\cos x}$

2. $y$

3. $y$

Найти дифференциал функции.

$= \quad - x^2)$

$= \dfrac{-2dx}{\sqrt{2 - x^2}}$

$= \quad - x^2)$

$= (3x^2 \ln(1 - x^2) - \dfrac{2x^4}{1 - x^2}$

(

Найти дифференциал второго порядка функции.

$= \quad + 5x^2$

$= (1\ x + 1\ ) d^2$

$x^3 \quad 2 \quad 0 \quad x$

$d^2 y = (5^x \ln^2 5 + 6x) dx^2$

4. $y$

5.

6. y

1. $y$ arcsin(1 $dy$

Ответ:

2. $y$ $x^3 \ln(1$

$dy$ $)dx$

Ответ: $y$ $2x^3$

1.

$d^2 y$

Ответ:

$y = 5^x$ +

2.

Ответ:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 77-92 (с. 207).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-11 (с. 176-177).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

4.1. Насколько изменится значение функции $y = 1 - x + x^2$ при изменении аргумента от 4 до 4,002?

4.2. Насколько изменится значение функции $y = x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$ при изменении аргумента от 3 до 3,001?

4.3. Дана функция $y = x^4 + x^3 - 2x$, найти $y$ (1,004).

4.4. Дана функция $y = x^3 + x^2 - x$, найти $y$ (0,998).

4.5. Используя общую формулу приближенных вычислений, вывести формулы для функций:

1) $ctg\ (x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

2) $arctg\ (x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

3) $ln(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

4.6. Найдите приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2, \Delta x = 0{,}001$. Какую погрешность допустим, если вычислим дифференциал вместо приращения?

4.7. Какова абсолютная погрешность округления:

а) с недостатком числа 8,3 до ближайшего целого числа;

б) с недостатком числа 9,6 до ближайшего целого числа;

в) с избытком числа 2,8 до ближайшего целого числа;

г) с избытком числа 7,1 до ближайшего целого числа.

д) с избытком числа 2,3 до ближайшего целого числа

4.8. С помощью формулы относительной погрешности выясните какое из двух измерений более точное: $(6{,}00 \pm 0{,}01)$м или $(345{,}0 \pm 0{,}5)$м

4.9. Расстояние между городами, измеренное по карте, равно (24,6±0,2) см. Определить фактическое расстояние между ними и определить абсолютную погрешность, если масштаб карты 1:2 500 000

4.10. Вычислите абсолютную и относительную погрешности, возникающие при замене приближенного числа $\pi \approx 3{,}1416$ более грубым приближением $\pi \approx 3{,}14$

*Вычислите приближенное значение приращения функции с помощью дифференциала:*

4.11. $y = 2x^2 - 5x - 3$ в точке $x_0 = 3$ при $\Delta x = 0{,}02$

4.12. $y = -x^3 + 4x + 1$ в точке $x_0 = 4$ при $\Delta x = 0{,}005$

4.13. $y = 3x^2 + 7x - 2$ в точке $x_0 = 8$ при $\Delta x = 0{,}03$

4.14. $y = \frac{1}{x^3} + 5$ в точке $x_0 = -2$ при $\Delta x = 0{,}016$

4.15. $y = 2x^2 - 6x + 3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 1$ к значению $x_2 = 1{,}001$.

4.16. $y = -5x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к значению $x_2 = 2{,}003$

*Результат вычислений найден с помощью калькулятора. Найдите значения выражений с помощью формул приближенных вычислений, определите абсолютную погрешность вычислений:*

4.17. $\sqrt{0{,}991} \approx 0{,}99489$

4.18. $\sqrt{1{,}008 \approx} 1{,}00399$

4.19. $1{,}0004^{50} \approx 1{,}0202$

4.20. $\sqrt{0{,}994} \approx 0{,}996996$

4.21. $1{,}0003^{20} \approx 1{,}00602$

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература**:


1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 5, пар. 5.3-5.4 (с. 168-176).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 8, пар. 64-67 (с. 160-170).


**Литература для обучающихся (в т.ч. адреса электронных ресурсов)**

**Основная литература**

| п/№ | Наименование | Автор (ы) | Год, место издания | Кол-во экземпляров в биб-лиотеке |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1. | Основы высшей математики: учебник | Лобоцкая, Н. Л. | - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М. : Альянс, 2015. - 479 с. | 1144 |
| 2. | Математический анализ: учебник : в 2-х ч. | В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. | 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект : Изд-во МГУ, 2007 - . - (Классический университетский учебник). Ч. 1. - 2007. - 660 с | 25 |

**Дополнительная литература**

| п/№ | Наименование | Автор (ы) | Год, место издания | Кол-во экземпляров в библиотеке |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | Основы высшей математики и статистики: учебник для студ. мед. и фармац. вузов и факультетов | Морозов Ю.В. | М. : Медицина, 2004. - 232 с. | 30 |
| 2 | Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому | Шапкин А.С. | 4-е изд. - М. : Дашков и К, 2007. - 431 с. | 30 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | программированию с решениями [Текст]: учеб. пособие | | | |
| 4 | Электронно-библиотечная система «Лань» | | | http:// e.lanbook.com |
| 5 | Электронно-библиотечная система «Консультант студента» для ВПО | | | www.studmedlib.ru |
| 6 | База данных «Электронная учебная библиотека» | | | http:// library.bashgmu.ru |

1. https://www.medicinform.net/ (Медицинская информационная сеть)

2. https://www.studentlibrary.ru/ (Консультант студента)