**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Кафедра медицинской физики с курсом информатики**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

**к практическим занятиям**

Дисциплина ***Математика и математические методы в биологии***

Специальность 06.05.01 — Биоинженерия и биоинформатика

Курс 1

Семестр II

Уфа

Рецензенты:

Главный научный сотрудник Института биохимии и генетики – обособленного структурного подразделения ФГБНУ Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, д.б.н., профессор

А.В. Чемерис.

Декан биологического факультета ФГБОУ ВО "Уфимский университет науки и технологий", заведующий кафедрой биохимии и биотехнологии, д.б.н., профессор, почетный работник ВПО РФ, Заслуженный деятель наук РБ, награжден медалью "За вклад в реализацию государственной политики в области образования"

С.А. Башкатов.

Автор: доцент Войтик В.В..

Утверждена на заседании № 10 кафедры медицинской физики с курсом информатики, от «18» апреля 2023 г.

Тема:

26. Применение определенного интеграла для решения прикладных задач.
27. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Общее и частное решения дифференциального уравнения.
28. Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Построение математических моделей задач физикохимического и медико-биологического содержания.
29. Ряды. Числовые ряды. Функциональные ряды.
30. Степенные ряды. Тригонометрические ряды. Ряды Тейлора.
31. Случайные события. Основные теоремы теории вероятности.
32. Случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины и числовые характеристики дискретной случайной величины, их свойства.
33. Функция распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, их свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
34. Генеральная и выборочная совокупности. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Погрешности прямых и косвенных измерений.
35. Статистическая, корреляционная и функциональная зависимости. Уравнения линейной регрессии. 36. Коэффициент линейной корреляции, его свойства. Расчет выборочного коэффициента линейной корреляции.
37. Проверка статистических гипотез.

**1. Тема занятия № 26 и её актуальность**. Применение определенного интеграла для решения прикладных задач.

Применение определенного интеграла во многом облегчает решение ряда задач в таких разных областях знания как механика, биология и экономика.

**2. Учебные цели**:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла
- решать некоторые задачи геометрии и физики с помощью определенного интеграла

**и овладеть следующими компетенциями:** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1) Вычисление работы переменной силы.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5.Продолжительность занятия:** 3 часа.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

Тест.

1). Производная логарифмической функции f(x)=*ln* x равна

1. $\sqrt{x}$; 2. $\sqrt{x\ln x}$; 3. $\frac{1}{x}$; 4. $\frac{1}{\ln x}$; 5. $\frac{x}{\ln x}$

2). Дифференциал функции y=6sin(2x) равен

1. 6cos(2x)dx; 2. 12sinxdx; 3. 6cos(2x)dx; 4. 12cos(2x)dx; 5. -12sin(2x)dx

3). Интеграл, который вычисляется способом непосредственного интегрирования

1. $\int$ xsin xdx; 2 $\int$ $xe^x dx$ ; 3. $\int (x^2+1)dx$ ; 4. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)}$; 5. $\int \ln xdx$

4). Производная от неопределенного интеграла равна

1. подынтегральной функции; 2. константе С; 3. подынтегральному выражению

4. единице; 5. первообразной подынтегральной функции

5). Интеграл $\int$ lnxdx/ x равен

1. x+c; 2. *ln*|x|+c; 3. $x^2$+c; 4. 0.5*ln*|x|+c; 5. 0.5$ln^2$x+c

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Задача. Скорость изменения силы тока в цепи обратно пропорциональна квадрату времени. Приняв коэффициент пропорциональности равным –1,12 установить закон изменения силы тока, если при t=0,4 мс значение силы тока равно 3,2 мА.

Типовые задачи.

1) Вычислить работу, произведенную при сжатии пружины на 0,02 м, если известно, что для укорочения ее на 0,003 м нужно приложить силу в 9 н.

Ответ: 0,6 Дж.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 171-178 (с. 282).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 8-20 (с. 233-234).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение) (см. приложение)**:

1. **Тема занятия № 27 и еѐ актуальность**. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Общее и частное решения дифференциального уравнения.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.

**2. Учебные цели**:

- научиться решать некоторые типы дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- виды дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать дифференциальные уравнения;

**и овладеть следующими компетенциями:** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Понятие о дифференциальных уравнениях.
2. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка, их решение методом вариации произвольного постоянного и методом Бернулли.

6.Уравнение в полных дифференциалах, его определение и решение.

7. Решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения $dy/dx=x$

1.$y=x+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$y=x^3/3+c$; 4.$y=-x+c$

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при $x=1$, $y=0$

1.$y=x^2+1$; 2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$; 4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка

1.ydy-xdx=0; 2.xdy-ydx=xdx; 3.xdy=(y+3x$^2$)dx;
4.dy=x$^2$dx 4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка

1.dy-xdx=0; 2.xdy-ydx=ydy; 3.xdy-ydx=x$^3$dx; 4.4dy-x$^3$dx=0

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=2x-1/x

1.y=x$^2$+x+c; 2.y=2x-lnx+c; 3.y=x$^2$+lnx+c; 4.y=x$^{2-}$lnx+c

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения y``=2x+1

1.y=x$^2$+x+c; 2.y=x$^3$+c$_1$x+c$_2$; 3.y=x$^3$/3+x$^2$/2+c$_1$x+c$_2$; 4.x$^3$+c$_1$x$^2$+c$_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения dy/y$^2$=xdx имеет вид

1.-1/y=x$^2$/2+c; 2.y=x$^2$/2+c; 3.1/y=x$^2$/2+c; 4.-1/y=x$^2$+c Ответы на тесты:

1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

**Дифференциальные уравнения**

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную $C$, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy$ 4 - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; $y$ $xy$ 5$y$ 1 $x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

**Дифференциальные уравнения с разделенными переменными**

Уравнение вида $f\ x\ dx\ \phi(\ )x\ dy$ 0, где $f\ x(\ )$ и $\phi(\ )x$ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f\ x\ dx(\ )\ \phi(\ )y\ dy$ и рассматривать как равенство двух $^2$, $dy\ dx$ - уравнения с разделенными дифференциалов. Например, $xdx\ ydy$ 0, 2$ydy$ 3$x\ dx$

$y$ $x$

переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием. **Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными**

Уравнение вида $f(x)F(y)dx\ \phi(x)\ \Phi(y)dy$ 0, где $f(x)$, $\phi(x)$, $\Phi(y)$, $F(y)$ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdxydy$ 0.

+ =

Решение. Здесь переменные разделены.

$\int$ Интегрируя, получим $\int xdx = \int ydy$ $C$ ; $x2$ $y2$

$C$ ; $x2 + y^2 = 2C$ .

2 2

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$= (x^2 - 1)dx$ , если $y$ = =

Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$ ; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$ ; $4 = \frac{1}{3} - 1 + C$ , откуда $C = \frac{14}{3}$. Итак, получаем ответ:

$y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$ .

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy$4, при $x$ 1.

Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y21)dx + y(x2 + 1)dy = 0$ .

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x2$ 1)($y$21) , получим

$xxdx2$ 1 $yydy2$ 1 0 .

Теперь переменные разделены; интегрируя,

$\int$ находим $\int xdx$ = $ydy$ $C$ ; 1ln($x$2 1) = −

1ln($y$2 1) 1ln$C$ . $x$2 1 $y$2 1

1 2 2 2

Здесь произвольная постоянная $C_1$ заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа

$|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$ , получим $\ln(x^2 + 1)(y^2 - 1) = \ln C$ , откуда $(x^2 + 1)(y^2 - 1) = C$ .

Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1)$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$

2)xdy-ydx=xdx Ответ: y=x(lnIxI+c)

3)(2x-y)dx-xdy=0 Ответ: $x^2$-xy=c

4)xy`=y-xe$^{y/x}$ Ответ: y=-xlnln(cx)

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1)y`+2xy=2x Ответ: y=1+ce$^{-x\cdot x}$

2)y`+3y=e$^{2x}$ Ответ: y=1/5e$^{2x}$+ce$^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1)y``=x Ответ: y=$x^3$/6+$c_1$x+$c_2$

2)y``-3y`/x=x Ответ: y=$c_1x^4$/4-$x^3$/3+$c_2$

3)yy``-2y`$^2$=0 Ответ: y=-1/($c_1$x+$c_2$)

1. $+xdy =$

$— + 2ydx = 0$

$dy$

2. $ydx\ 0$

$2x' =$

3. $' = x^2dy\ y$

$^2dx$

4. $y\quad x$ 5. $y\quad y^2\cos x$

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $y'\ y^2\ \cos\ x$; б) $y' tgxtgy$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а) $2y'\ x\ y$; если $y$ 1 при $\sqrt{x}$ 4;

б) 2 $y\ y'$; если $y$ 1 при $x$ 0;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

**Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:**

**1.** $y' = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

**Найти решение однородных дифференциальных уравнений:**

**1.** $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y}$. **2.** $x^3y' = y\,(y^2+x^2)$.

Задание 3

**Найти решение линейных дифференциальных уравнений:**

**1.** $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3 \ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение)**:

**Тема занятия № 28 и её актуальность**. Дифференциальные уравнения 2го порядка. Построение математических моделей задач физико-химического и медико-биологического содержания.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решение соответствующих дифференциальных уравнений.

**1. Учебные цели**:

- изучение видов дифференциальных уравнений и методов их решения;
- умение применять теорию дифференциальных уравнений при решении типовых задач;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- виды дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать дифференциальные уравнения;
- составлять и решать дифференциальные уравнения в задачах медико-биологического содержания.

**и овладеть следующими компетенциями:** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

7)Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1.Дано дифференциальное уравнение $y''+2y'+5y=0$. Тогда его общим решением является

1.$e^{-x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)$; 2.$e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$; 3.$e^{x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

Ответ: 1.2

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

**Применение дифференциальных уравнений для решения физических, химических и биологических задач.**

**Задача о скорости размножения бактерий**

Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий. В течение 3 часов их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 часов?

Решение. Пусть $x$ — количество бактерий в момент $t$. Тогда согласно условию

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности.

Отсюда $x = ce^{kt}$. Из условия известно, что $x|_{t=0} = 100$. Значит,

$$C = 100, \quad x = 100e^{kt}.$$

Из дополнительного условия $x|_{t=3} = 200$. Тогда $200 = 100e^{3k}$, $2 = e^{3k}$, $e^k = 2^{1/3}$.

Искомая функция:

$$x = 100 \cdot 2^{t/3}.$$

Значит, при $t = 9$ $x = 800$, т. е. в течение 9 часов количество бактерий увеличилось в 8 раз.

**Задача об увеличении количества фермента**

В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его начальному количеству $x$. Первоначальное количество фермента $a$ в течение часа удвоилось. Найти зависимость $x(t)$.

Решение. По условию дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

отсюда $x = ce^{kt}$.

Но $x|_{t=0} = a$. Значит, $C = a$, и тогда $x = ae^{kt}$.

Известно также, что $x|_{t=1} = 2a$.

Следовательно, $2a = ae^k$, $e^k = 2 \Rightarrow x(t) = a2^t$.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Задание 1. Решить задачу составив дифференциальное уравнение

**Задача о радиоактивном распаде**

Скорость распада Ra (радия) в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найти закон радиоактивного распада Ra, если известно, что в начальный момент имелось $m_0$ Ra и период полураспада Ra равен 1590 лет.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1) $2y``-5y`+2y=0$ Ответ: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{x/2}$

2) $y``-8y`+16y=0$ Ответ: $y=e^{4x}(c_1+c_2x)$

3) $y``+y=0$ Ответ: $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ 4) $y``+8y`+25y=$ Ответ: $y=e^{-4x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$ 2. Найти частное решение:

1) $y``+y`-2y=0$ при $y(0)=1$, $y`(0)=0$. Ответ: $y=2/3e^x+1/3e^{-2x}$

2) $y``-2y`+y=0$ при $y(0)=0$, $y`(0)=1$. Ответ: $y=xe^x$

3. Наэлектризованное изолированное тело вследствие несовершенства изоляции постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда пропорциональна его величине. В начальный момент времени величина заряда равна 100 Кл, а по истечении 10 мин.- 50 Кл. Определить величину заряда через 20 мин. Ответ: q=25 Кл.

4. Тело температурой 25˚С погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0˚С. Зная, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды, определить, за какое время тело охладится до 10˚С, если за 20 мин. оно охлаждается до 20˚С.
Ответ: 82 мин.

5. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 мг препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме после 2 часа? Ответ: 25 мг.

6. Популяция бактерий увеличивается таким образом, что удельная скорость роста в момент t (час) составляет величину 1/(1+2t). Допустим, что начальной популяции соответствует x(0)=1000. Какой будет популяция после 4 часов роста? После 12 часов? Ответ: 3000; 5000.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 40-85 (с. 505-508).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 6,7 (с. 273-274), 1-19 (с. 295-297)

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.
Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.
Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение)**:

**1. Тема занятия № 29 и её актуальность**. Ряды. Числовые ряды. Функциональные ряды.

Ряды являются мощным средством изучения функций и сильным вычислительным аппаратом, позволяющим находить их значения, вычислять интегралы и решать другие прикладные задачи. Во многих случаях точное выполнение указанных математических операций оказывается весьма затруднительным или невозможным. В этих случаях можно получить приближенное решение при помощи рядов с любой, достаточной для практического использования, точностью. Ряды представляют собой простой и совершенный инструмент математического анализа, в том числе, и для решений дифференциальных уравнений. Поэтому знакомство обучающихся с теорией рядов – обязательная часть высшего образования. Без теории рядов невозможно представить дифференциальное и интегральное исчисления. Ряды играют большую роль в экономике, инженерии, геодезии, химии, физике, астрономии, биологии, архитектуре, эстетике, теории музыки, криптографии и т.д.

**2. Учебные цели**:

- изучение основных понятий числовых рядов.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- основные понятия и задачи теории рядов;
- необходимый и достаточные признаки сходимости рядов; - основные методы разложения в ряд Фурье.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- **уметь** исследовать **ряды** на сходимость;
- находить область сходимости

**и овладеть следующими компетенциями:** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Числовые ряды.
2. Основные свойства рядов.
3. Положительные ряды.
4. Знакочередующиеся ряды.
5. Абсолютная и условная сходимости.
6. Ряды с комплексными членами.
7. Функциональные ряды. Область их сходимости.
8. Равномерная сходимость функционального ряда.
9. Свойства равномерно сходящихся рядов.

**4. Вид занятия**: практическое занятие. **5. Продолжительность занятия:** 3 часа.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Дайте определения сходящегося и расходящегося рядов. 2.Исследуйте сходимость ряда, составленного из членов геометрической прогрессии. Приведите примеры.

3.Исследуйте сходимость ряда Дирихле. Приведите при- меры.

4.Необходимый признак сходимости ряда.

5.Можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$?

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ условие

6.Является ли необходимым для сходимости ряда

а) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 1$; б) не все члены ряда – числа $u_n$ – равны 1;

в) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$; г) не все члены ряда – числа $u_n$ – равны 0?

7.Верно ли, что

а) если ряд сходится, то его частичные суммы ограничены;

б) если частичные суммы ряда ограничены, то ряд сходится?

8.Признаки сравнения рядов с положительными членами.
Приведите примеры применения этих признаков.

9.Признак Даламбера сходимости знакоположительных рядов. Приведите пример применения этого признака.

10.Радикальный признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Приведите примеры применения этого признака.

11.Интегральный признак Коши сходимости ряда. Приведите примеры применения этого признака.

12.Существует ли ряд, который

а) по признаку Коши сходится, а по признаку Даламбера расходится?

б) по признаку Даламбера расходится, а по интегральному признаку сходится?

в) по признаку Даламбера сходится, а по признаку Коши расходится?

13.Дайте определение знакопеременного ряда, его условной и абсолютной сходимости. Приведите примеры абсолютно и условно сходящихся рядов.

14.Следует ли сходимость знакопеременного ряда из его абсолютной сходимости?

15.Дайте определение знакочередующегося ряда, его условной и абсолютной сходимости. Приведите примеры абсолютно и условно сходящихся рядов.

16.Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Приведите примеры его применения.

17.Верно ли для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, что

а) если ряд абсолютно сходится, то он сходится и условно? б) если ряд сходится условно, то он не сходится абсолютно? в) если ряд сходится абсолютно, то является сходящимся?

18.Верно ли, что если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ сходится, то $u_n \to 0$ (при $n \to \infty$) монотонно?

19.Верно ли для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, что

а) если последовательность $u_n$ монотонна, то ряд сходится? б) если $u_n \to 0$ (при $n \to \infty$), то ряд сходится?

в) если $u_n \to 0$ (при $n \to \infty$) монотонно, то ряд сходится условно? г) если $u_n \to 0$ (при $n \to \infty$) монотонно, то ряд сходится?

20.Верно ли для знакопеременного ряда, что а) ряд сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся два ряда – ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов? б) если ряд сходится условно, то расходятся два ряда – ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов?; в) если один из двух рядов (с положительными членами и отрицательными членами) сходится, а другой – расходится, то исходный ряд расходится? г) если ряд сходится условно, то ряд из его положительных членов сходится?

21.Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$, если

а) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся? б) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходятся? в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится?

22.Из того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ сходится, следует ли, что

а) оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся? б) оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходятся? в) один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, а другой расходится?

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+8n}{15n^2-2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n n^4}{n!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)}$

Решение.

а) Предел общего члена ряда $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится; б) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Предел общего члена ряда $\lim_{n\to\infty} u_n = e$ (второй замечательный предел), необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд. Предел его общего члена $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, необходимый признак сходимости выполняется, ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся, т.е. вопрос о сходимости ряда остается открытым. Из вышесказанного известно, что этот ряд расходится, но необходимый признак сходимости это утверждение не доказывает. г)

Найдем предел общего члена ряда: $\lim_{n\to\infty} u_n$ – получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой следует разделить числитель и знаменатель на переменную в наивысшей из участвующих в выражении степеней (в данном случае и в числителе, и в знаменателе старшая степень переменной равна 2):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+8n}{15n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n^2+8n)/n^2}{(15n^2-2)/n^2}=\frac{1}{3}\neq 0$$

необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится. д) факториал растѐт быстрее, чем любая показательная или степенная последовательность, или многочлен, или произведение любого количества показательных и степенных последовательностей (случай в нашем примере). Таким образом, в нашем примере д) предел общего члена ряда $\lim_{n\to\infty} u_n$, т.к. n! более высокого порядка роста, чем $7^n n^4$. Необходимый признак сходимости выполняется, вопрос о сходимости ряда остается открытым. е) предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)'}{(\ln(n+1))'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n+1}}=\infty.$$

Мы применили правило Лопиталя. Необходимый признак сходимости не выполнен, ряд расходится.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М.
: Академия, 2005. - 611 с. № 1-30 (с. 427-430).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.
Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.
Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение)**

## 1. **Тема занятия № 30 и еѐ актуальность**. Степенные ряды.

Тригонометрические ряды. Ряды Тейлора.

Ряды являются мощным средством изучения функций и сильным вычислительным аппаратом, позволяющим находить их значения, вычислять интегралы и решать другие прикладные задачи. Во многих случаях точное выполнение указанных математических операций оказывается весьма затруднительным или невозможным. В этих случаях можно получить приближенное решение при помощи рядов с любой, достаточной для практического использования, точностью. Ряды представляют собой простой и совершенный инструмент математического анализа, в том числе, и для решений дифференциальных уравнений. Поэтому знакомство обучающихся с теорией рядов – обязательная часть высшего образования. Без теории рядов невозможно представить дифференциальное и интегральное исчисления. Ряды играют большую роль в экономике, инженерии, геодезии, химии, физике, астрономии, биологии, архитектуре, эстетике, теории музыки, криптографии и т.д.

## 2. **Учебные цели**:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла
- решать некоторые задачи геометрии и физики с помощью определенного интеграла

**и овладеть следующими компетенциями:** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Степенной ряд и его область сходимости.
2. Свойства степенных рядов.
3. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.
4. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды.
5. Приложения степенных рядов к приближѐнным вычислениям.
6. Степенные ряды в комплексной области. Круг сходимости ряда.
7. Показательная и тригонометрическая функции комплексной переменной.
8. Логарифмическая функция.
9. Тригонометрические ряды.
10. Комплексная форма ряда Фурье.

11. Разложение функции в ряд Фурье.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М.
: Академия, 2005. - 611 с. № 31-49 (с. 430-431).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

1. Указать ряд Фурье

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin nx$ ; б) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \; a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ; в) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ ; г) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; x^n + \cos nx$

$\sum_{n=1}^{\infty} \; a_n x^n + b_n y^n$

2. По какой формуле определяются коэффициенты ряда Фурье для четной функции?

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$ ; б) $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$ ; в) $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$ ; д) $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий. д)

а) *a*

г) *b*

3. Для разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной функции, заданной на отрезке [0, *l* ] необходимо продолжить функцию:

а) на [-$l$ ,0]; б) на [-2$l$ ,0]; в) на всю ось с периодом $l$ ; г) на [-$l$ ,0] и на всю ось с периодом 2$l$ ; г) на всю ось с периодом 2$l$ ;

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение)**

**1. Тема занятия № 31 и еѐ актуальность**. Случайные события. Основные теоремы теории вероятности.

Достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей. Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии и во многих других теоретических и прикладных науках. Основные понятия и методы теории вероятностей необходимы студентам медицинских специальностей для решения задач статистической обработки и прогнозирования в медицине и фармации.

**2. Учебные цели**:

- Научиться находить вероятности случайных событий.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- основные понятия и теоремы теории вероятностей;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- вычислять вероятности случайных событий.

**и овладеть следующими компетенциями:** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие случайного события.

2)Определение достоверного события.

3)Определение невозможного события.

4)Определение совместных событий.

5)Определение несовместных событий.

6)Определение полной группы событий.

7)Классическое определение вероятности.

8)Свойства вероятности.

9)Статистическое определение вероятности.

10)Теорема сложения вероятностей совместных и несовместных событий.

11)Определение противоположных событий.

12) Определение условной вероятности.

13) Определение независимых событий. Теорема умножения для независимых событий.

14) Определение зависимых событий.

15) Теорема умножения для зависимых событий.
16)Вычисление вероятности появления хотя бы одного события.
17)Формула полной вероятности.
18)Формула Байеса.
19)Формула Бернулли.
20)Локальная теорема Лапласа.
21)Закон Пуассона.
22) Интегральная теорема Лапласа.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия:** 3 часа.

**6. Оснащение**:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

События обозначаются первыми буквами латинского алфавита: А, В, С. Виды событий: события достоверные, невозможные, случайные. Случайные события могут произойти или не произойти при осуществлении данной совокупности условий. Невозможные события никогда не происходят при осуществлении данной совокупности условий. Достоверные события всегда происходят при осуществлении данной совокупности условий. Случайные события: несовместные, совместные, независимые, зависимые, равновозможные, противоположные. Несовместными называются события, которые не могут одновременно произойти в одном испытании. Совокупность случайных событий А1, А2,А3,…An называется полной группой для данного испытания, если в результате испытания обязательно происходит только одно из событий этой совокупности. Два события (А и $\bar{A}$ ) называются противоположными, если появление одного из них равносильно непоявлению другого противоположное событие (читается «не А»). Совместными называются события, которые могут одновременно произойти в одном испытании. Равновозможными называются события, если ни у одного из них нет объективного преимущества перед другим. События называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления второго. События называются зависимыми если появление одного из них зависит от появления другого. **Алгебра событий.**

Суммой (объединением) двух несовместных событий А и В называется событие А+В состоящее в том, что произойдет хотя бы одно из них. Суммой (объединением) двух совместных событий А и В называется событие А+В состоящее в том, что произойдет либо событие А, либо В, либо оба вместе. Произведением (совмещением) двух событий A и B называется событие AB состоящее в их совместном появлении

**Классическое определение вероятности**

Под вероятностью P(A) наступления события будем понимать отношение числа исходов (m),благоприятствующих наступлению данного события, к числу всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных) испытания (n): P(A) = m/n

Для случайного события m < n; для достоверного события m = n; для невозможного события m = 0.

Границы значений вероятности события: $0 \le p \le 1$

**Теорема полной вероятности**

*Теорема*. Вероятность события А, которое может осуществиться лишь при условии осуществления одного из несовместных событий $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, образующих полную группу, равна сумме произведения вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А: $P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + ... + P(A_n)P(A/A_n)$,

или $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(A/A_i)$$

**Формула Байеса**

Следствием двух основных теорем теории вероятностей - теоремы сложения и теоремы умножения, являются формула полной вероятности и формула Байеса. Если событие А может произойти только при условии появления одного из событий (гипотез) $B_1$, $B_2$,…, $B_n$, образующих полную группу, то вероятность события А равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий (гипотез) на соответствующие условные вероятности события А:

( 11 )

По условию гипотезы $B_1$, $B_2$,…, $B_n$ образуют полную группу, следовательно, они единственно возможные и несовместные. Тогда $A = B_1A+B_2A+…+B_nA$

По теореме сложения вероятностей

$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + … + P(B_nA)$

$A_1$, $A_2$,..., $A_n$ – несовместные события, образующую полную группу событий; событие Е может наступить лишь совместно с одним из событий $A_j$. Если событие Е уже произошло, то вероятности событий $A_j$ могут быть определены по формуле Байеса:

$$P(Aj/E) = \frac{P(Aj)P(E/Aj)}{P(E)}, \text{ где } P(E) = \sum_{j=1}^{n} P(Aj)P(E/Aj)$$

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступлении события А, т.е. по мере получения новой информации, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход, называемый байесовским, дает возможность корректировать управленческие решения в экономике, оценки неизвестных параметров распределения изучаемых признаков в статистическом анализе и т.п.

**Теоремы сложения и умножения вероятностей**

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме их вероятностей : P(A+B)=P(A)+P(B). Следствие: Сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу равна 1.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

*Для совместных событий*. Вероятность появления одного из двух совместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A) + P(B) - P(AB).$$

Если же появление одного из событий не меняет вероятности другого, то события называют независимыми. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

**Повторные независимые испытания. Формула Бернулли**

Задача: Какова вероятность появления события А при проведении серии испытаний при одних и тех же условиях? Допущения: а) Вероятность ожидаемого события Р(А)=р остается постоянной в каждом испытании; б) Учитываются только два исхода: появление события А или его альтернатива Р( )=q, причем p+q=1; в) Формула Бернулли описывает вероятность появления Pn(m) события А в n независимых испытаниях m раз. Формула Бернулли: Р ( )$_n$ $m$ $C$ $p$ $q_n^{m\ m\ n\ m}$

**Вероятность редких событий. Формула Пуассона**

$= \mu \quad {}^{-\mu} = \quad \mu$

Если вероятность ожидаемого события А очень мала ( $p$ 0), то справедлива формула Пуассона:

$$m$$

$$P\ ({}_n m) \quad e\ , \qquad np\ m!$$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. Какова вероятность появления нечетной грани при бросании кости.

Решение. Появление нечетной грани при бросании кости (событие А) происходит при выпадении 1, или 3, или 5, т.е. здесь m = 3, поэтому Р(А) = 3/6 = ½

Пример. Пластмассовые болванки изготовляются на трех прессах. 1-й пресс вырабатывает 50% всех болванок, 2-й – 30% и 3-й – 20%. При этом: из болванок с 1-го пресса в среднем 0,025 нестандартных, со 2го – 0,020, с 3-го – 0,015. Найти вероятность того, что наудачу взятая со склада болванка соответствует стандарту.

Решение: $P(A_1) = 0{,}5$; $P(A_2) = 0{,}3$ и $P(A_3) = 0{,}2$; $P(A/A_1) = 0{,}025$; $P(A/A_2) = 0{,}020$; $P(A/A_3) = 0{,}015$ (событие $A_1$ – появление болванки с 1-го пресса, $A_2$ – со 2-го пресса, $A_3$ – с 3-го пресса, $(A/A_{1,2,3})$ – появление нестандартной болванки с 1-го, 2-го или 3-го пресса соответственно). Если событие Е обозначает соответствие болванки стандарту, то для отдельных прессов имеем следующее условные вероятности выпуска стандартных болванок: $P(E/A_1) = 0{,}975$, $P(E/A_2) = 0{,}980$ и $P(E/A_3) = 0{,}985$. Отсюда Р(Е) = 0,50,975 +

0,30,98 + 0,20,985 = 0,9785, т.е. вероятность того, что взятая наудачу со склада болванка стандартна, равна 0,9785.

Пример. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий в процентном составе: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия. Известно, что 10% продукции первого предприятия высшего сорта, второго предприятия - 5%, третьего предприятия

- 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная продукция окажется высшего сорта.

Решение. Обозначим события: А – была куплена продукция высшего сорта. $B_1$, $B_2$, $B_3$ – покупка продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятию. Очевидно, что событие А может произойти только совместно с одним из событий $B_1$, $B_2$ или $B_3$ , т.к. они образуют полную группу, т.е.

$A = B_1A+B_2A+B_3A$

По формуле полной вероятности

$P(A) = 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}05 + 0{,}5\cdot 0{,}2 = 0{,}135$

Пример. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии ,

$P_и = 0{,}4$, а того, что он произведен в Турции – $P_т= 0{,}3$. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран? $P = P_и +P_т = 0{,}4 +0{,}3 = 0{,}7$

Пример. Из группы студентов 10% знают английский язык, 5% - французский

и 1% - оба языка. Какова вероятность того, что наугад выбранный студент знает хотя бы один иностранный язык?

$P = 0{,}1 + 0{,}05 – 0{,}01 = 0{,}14$.

Пример. В денежно-вещевой лотерее на серию в 10000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Найти вероятности:

а) получить денежный выигрыш; б) получить вещевой выигрыш; в) получить выигрыш вообще; г) ничего не выиграть.

Решение. а) $P_{ден} = 120/10\,000 = 0{,}\ 012$; б) $P_{вещ} = 80/10\,000 = 0{,}008$; в) $P_{вообще} = 0{,}\ 012 + 0{,}\ 008 = 0{,}02$; г) $P_{ничего} = 1 – 0{,}02 = 0{,}98$.

Пример. Завод производит 85% продукции первого сорта и 10% второго. Остальные изделия считаются браком. Какова вероятность того, что, взяв наудачу изделие, мы получим брак? $P = 1-(0{,}85 + 0{,}1) = 0{,}05$.

Пример. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

Решение. Событие А – среди взятых учебников есть хотя бы один в переплете. среди взятых учебников нет ни одного в переплете. Очевидно, чтоНайдемОбщее число способов , которыми можно взять 3 учебника из 15 учебников, равно. Число учебников без переплета 15-5=10. Из этого числа учебников можно взятьспособами 3 учебника без переплета. Поэтому вероятность того, что среди взятых учебников нет ни одного в переплете, равнаИскомая вероятность

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,9. Какова вероятность того, что в мишени 3 пробоины?
2. Из группы студентов знают английский язык, 5%-французский и 1% - оба языка. Какова вероятность того, что наугад выбранный студент не знает ни одного иностранного языка?
3. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 3 вопроса.
4. Вероятность попадания стрелка в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что после двух выстрелов мишень окажется поврежденной.

5. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено 4 билета.

6. Вероятность попадания стрелка в мишень при одном выстреле равна 0,2. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попасть в цель хотя бы один раз?

7. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,9, третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы, по крайней мере, 2 экзамена.

8. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента или одновременный выход из строя двух элементов. Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1, 0,2, 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

9. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий в процентном составе: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия. Известно, что 10% продукции первого предприятия высшего сорта, второго предприятия - 5%, третьего предприятия - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная нами продукция окажется высшего сорта.

10. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна 0,8; для второго стрелка – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что она принадлежит второму стрелку?

11. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности p=0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?

12. Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустил ошибку при установлении диагноза, равна 0,01. Для второго и третьего врачей вероятность ошибки соответственно 0,015 и 0,02. Составьте полную систему для данного события: независимого осмотра больного тремя врачами. Найти вероятность того, что при осмотре больного *хотя бы один* из врачей допустит ошибку в диагнозе. Задачу решите двумя способами.

13. Имеется три урны: в первой - 1 белый шар и 2 черных; во второй 5 белых и 2 черных, в третьей - только белые шары. Наугад выбираем урну, а затем шар из нее. Найти вероятность того, что вынут белый шар.

14. По условию задачи 13 найти вероятность того, что шар вынут из первой урны при условии, что он черный.

15. Всхожесть семян некоторого растения составляет до 80%. Определить вероятность того, что из 5 посеянных семян а) взойдут 4; б) взойдут не менее 4-х.

Решить задачи.

1.Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Ответ: 5/36.

2.Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи. Ответ:1/6.

3.На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.
Ответ: 67/91.
4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.
Ответ: 0,38.
5.В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплете. Библиотекарь наудачу взял 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.
Ответ: 0,2.
6.В ящике имеется 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.
Ответ:1/14.
7.Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что Студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса. Ответ:57/115.
8.В электрическую цепь последовательно включены 3 элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}15$; $p_3=0{,}2$.
Найти вероятность того, что тока в цепи не
будет. Ответ: 0,388.
9.В урну содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего из урны наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).
Ответ:2/3.
10.Два автомата производят одинаковые детали, которые сбрасываются на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.
Ответ:10/17.
11.Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются) ?
Ответ: вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.
12.Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз. Ответ: $P_{100}(75)=0{,}04565$.
13.Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 5 абонентов?
Ответ: 0,0916.

14.Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365.

Ответ: 0,2385.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-28 (с. 528-531).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-14 (с. 317).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

1.Вероятность случайного события:

1.P=0

2.P=1

3.$0<P<1$

4.$0\leq P\leq 1$

2.Вероятность достоверного случайного события:

1.P=0

2.P=1

3.$0<P<1$

4.$0\leq P\leq 1$

3.Вероятность невозможного случайного события:

1.P=0

2.P=1

3.$0<P<1$

4.$0\leq P\leq 1$

4.Закон сложения вероятностей для двух несовместных событий:

1. P(A или B)=P(A)+P(B)
2. P(A или B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)
3. P(A и B)=P(A)P(B)
4. P(A и B)=P(A)P(B/A)
5. P(A/B)=( P(A)P(B/A))/P(B)

5.Закон сложения вероятностей для двух совместных событий:

1. P(A или B)=P(A)+P(B)
2. P(A или B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)
3. P(A и B)=P(A)P(B)
4. P(A и B)=P(A)P(B/A)
5. P(A/B)=( P(A)P(B/A))/P(B)

6.Закон сложения вероятностей для двух независимых событий:

1. P(A или B)=P(A)+P(B)
2. P(A или B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)
3. P(A и B)=P(A)P(B)

4. P(A и B)=P(A)P(B/A)
5. P(A/B)=( P(A)P(B/A))/P(B) 7.Закон сложения вероятностей для двух зависимых событий:
1. P(A или B)=P(A)+P(B)
2. P(A или B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)
3. P(A и B)=P(A)P(B)
4. P(A и B)=P(A)P(B/A)
5. P(A/B)=( P(A)P(B/A))/P(B) 8.Формула Байеса для двух зависимых событий:
1. P(A или B)=P(A)+P(B)
2. P(A или B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)
3. P(A и B)=P(A)P(B)
4. P(A и B)=P(A)P(B/A)
5. P(A/B)=( P(A)P(B/A))/P(B)

9.Из определений относительной частоты и вероятности случайного события следует:

1.Относительная частота – это условная вероятность.

2.Вероятность вычисляют после опыта, частоту – до опыта.

3.Вероятность вычисляют до опыта, частоту – после опыта.

4.Вероятность – это предел, к которому стремится частота при неограниченном увеличении числа испытаний.

10.Случайные события:

1.Рождение мальчика.

2.Попадание в мишень при выстреле.

3.Восход Солнца.

4.Выигрыш в лотерею.

Ответы на тесты.

3.5, 9.3,4, 10.1,2,4 Тест

1) Произведением двух событий А и В называется событие С, которое состоит в осуществлении.

1. события А или В / или А и В одновременно; 2. события А; 3. события А и В

4. события В; 5.наступления события А, но события В не наблюдается

2) Полигоном частот называют

1. ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников ,основаниями которых служат частичные интервалы, а высоты равны плотности частоты; 2. ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы, а высоты равны плотности относительной частоты; 3. ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_i,m_i)$, где $m_i$-частоты; 4. ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_i,p_i^*)$, где $p_i^*$-относительные частоты; 5. ломанную, отрезки которой заменяют точки $(m_i,p_i)$, где $m_i$-частоты, $p_i$-относительные частоты.

3) Вероятность случайного события

1. P=0; 2.P=1; 3. 0< P< 1; 4. $0 \le P \le 1$; 5. $P \to \infty$

4). Вероятность достоверного случайного события.

1. P=0; 2. P=1; 3. O< P<1; 4. $0 \le P \le 1$; 5. $P \to \infty$

5). Вероятность невозможного случайного события.

1. P=0; 2. P=1; 3. O< P<1; 4. $0 \le P \le 1$; 5. $P \to \infty$

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение)**

**1.Тема занятия № 32 и еѐ актуальность**. Случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины и числовые характеристики дискретной случайной величины, их свойства.

Основные понятия и методы теории вероятности являются средствами решения задач физического, химического, биологического и иного характера, встречающихся как в процессе изучения профильных дисциплин, так и в дальнейшей профессиональной деятельности.

**2. Учебные цели**:

- научиться составлять закон и функцию распределения дискретной случайной величины, строить их графики, определять числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, находить с помощью функции распределения вероятность событий.
- научиться по функции распределения находить плотность распределения вероятностей дискретной случайной величины и наоборот, вычислять числовые характеристики непрерывных случайных величин - научиться навыкам работы с большими массивами случайных величин.

Для формирования профессиональных компетенций студент должен **знать:**

- понятия функции и распределения вероятности дискретных случайных величин.
- числовые характеристики случайных величин;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- научиться определять числовые характеристики дискретных случайных величин и вероятность попадания значений случайной величины в заданный интервал;
- составлять закон и функцию распределения дискретной случайной величины,
- строить их графики,
- определять числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение,
- находить с помощью функции вероятностей распределение вероятностей событий;

и овладеть следующими **компетенциями:** способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы**: Вопросы для самоподготовки:

1. Что называют дискретной случайной величиной? В чем ее отличие от непрерывной случайной величины?
2. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
3. Задайте закон распределения дискретной случайной величины таблично, аналитически, графически.
4. Дайте понятие ряда распределения, многоугольника распределения.
5. Что такое функция распределения дискретной случайной величины?
6. Что называют математическим ожиданием дискретной случайной величины?
7. Перечислите свойства математического ожидания.

8. Что называют дисперсией дискретной случайной величины? Запишите формулу.
9. Перечислите свойства дисперсии случайной величины. 10. Что называют средним квадратическим отклонением? Запишите формулу.
11.
13. Какая дискретная величина имеет биномиальное распределение?
14. Какая случайная величина называется распределенной по закону Пуассона?

Вопросы.

1)Виды случайных величин.
2)Определение дискретной случайной величины.
3)Определение непрерывной случайной величины.
4)Числовые характеристики случайных величин.
5)Определение математического ожидания дискретной случайной величины.
6)Свойства математического ожидания случайной величины.
7)Определение дисперсии дискретной случайной величины.
8)Свойства дисперсии случайной величины.
9)Среднее квадратическое отклонение.
10)Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
11)Биномиальное распределение.
12)Распределение Пуассона.
13)Определение функции распределения вероятностей случайной величины.
14)Свойства функции распределения.
15)График функции распределения.
16)Определение плотности распределения.
17)Свойства плотности распределения.
18)Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
19)Определение математического ожидания непрерывной случайной величины.
20)Определение дисперсии непрерывной случайной величины.
21)Закон равномерного распределения вероятностей.
22)Нормальное распределение.
23)Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.
24)Правило трех сигм.
25)Распределение “хи квадрат”.
26)Распределение Стьюдента.
27)Распределение F Фишера-Снедекора.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия**: 3 часа.

**6. Оснащение:**

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

Задания для самоконтроля: решение студентами индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

### *Случайные величины*

*Случайная величина* – это величина, которая в результате испытания может принять одно и только одно возможное значение, причем неизвестно заранее какое именно. Например, количество больных в данном районе, вес и рост человека и т.д.

Случайные величины могут быть *дискретными*, т.е. принимать отдельные друг от друга возможные значения с определенными вероятностями, которые можно пронумеровать. Например, количество студентов на занятии.

*Законом распределения случайной величины* называется соответствие между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблицей:

| **X** | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| p | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

### *Числовые характеристики случайных величин*

*Математическое ожидание* случайной величины указывает некоторое ориентировочное значение, вокруг которого группируются все значения случайной величины.

*Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений величины X на вероятности этих значений:

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i .$$

*Дисперсией* случайной величины называется математическое ожидание квадрата соответствующего отклонения случайной величины X от еѐ математического ожидания: $D(x) = M((X - M(x))^2)$ Для дискретной случайной величины:

$$D(x) = (x_1 - Mx)^2p_1 + (x_2 - Mx)^2p_2 + \ldots + (x_n - Mx)^2p_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(x))^2p_i$$

*Средним квадратическим отклонением* случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

### *Распределение Пуассона*

Дискретная случайная величина X – число появлений события A в n повторных независимых испытаниях (n велико), причем для каждого испытания $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$, $p < 0,1$.

Вероятности значений случайной величины X равны $P_n(x) \approx \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$, где $\mu$ – параметр распределения

Распределение Пуассона может использоваться в качестве хорошего приближения биномиального распределения, если n велико и p мало. Тогда в качестве $\mu$ нужно взять np.

Распределение Пуассона описывается одним параметром $\mu$.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. О влиянии фармакологического препарата судят по изменению веса лабораторных животных, которым в течение недели вводили препарат. За неделю изменение веса составило:

| Изменения веса, г | -150 | -100 | -50 | 0 | +50 | +70 | +100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,05 | 0,05 | 0,10 | 0,20 | 0,25 | 0,25 | 0,10 |

Найти средний вес животных и его среднюю дисперсию.

Решение: M(X) = (-150) 0,05 + (-100) 0,05 + (-50) 0,1 + 0 0,02 + 50 0,25 + 70 0,25 + 100 0,10 = -7,5 – 5 – 5 + 0 + 12,5 + 17,5 + 10 = -17,5 + 40 = 22,5.

$D(x) = (-150 - 22{;}5)^2\, 0{,}05 + (-100 - 22{,}5)^2\, 0{,}05 + (-50 - 22{,}5)^2\, 0{,}1 + (0 - 22{,}5)^2 0{,}2 + (50 - 22{,}5)^2 0{,}25 + (70 - 22{,}5)^2\, 0{,}25 + (100 - 22{,}5)^2\, 0{,}10 = 1487{,}8 + 750{,}3 + 525{,}6 + 101{,}3 + 189{,}1 + 564{,}1 + 600{,}6 = 4218{,}8.$

$\sigma(x) = \sqrt{4218{,}8} \approx 64{,}95 \approx 65.$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи.

1.Закон распределения случайной величины X задан следующей таблицей:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 0,12 | 0,34 | 0,35 | 0,16 | 0,03 |

Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Ответ: M(X)=1,64; D(X)=0,97; $\sigma$=0,985.

2.Для случайной величины X, закон распределения которой приведен в задаче 1, найти функцию распределения и построить ее график.

Ответ: $F(x)=\begin{cases} 0; & x \le 0 \\ 0{,}12; & 0 < x \le 1 \\ 0{,}46; & 1 < x \le 2 \\ 0{,}81; & 2 < x \le 3 \\ 0{,}97; & 3 < x \le 4 \\ 1; & x > 4 \end{cases}$

5.Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 40 и дисперсией 100. Найти вероятность того, что значение случайной величины заключено в интервале ]20;50[.

Ответ: P(20<X<50)=0,8185.

6.Всхожесть семян лекарственного растения оценивается вероятностью 0,9. Составить биномиальное распределение вероятностей появления всхожих семян из пяти наугад взятых.

Ответ: $P_5(0)$=0,00001, $P_5(1)$=0,00045, $P_5(2)$=0,0081, $P_5(3)$=0,0729, $P_5(4)$=0,328, $P_5(5)$=0,59.

***Задание 1. Распределение дискретной случайной величины и её характеристики.***

1) Имеется двадцать коробок с яблоками, причем количество яблок в них составляет 10, 9, 11, 10, 12, 8, 11, 9, 10, 10, 11, 8, 9, 10, 9, 11, 12, 10, 9 и 11 штук. Составить закон распределения случайной величины X, определяемой как количество яблок в произвольно выбранной коробке, построить многоугольник распределения и найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду этой величины.

2) Число фармацевтов в каждой из 15 аптек некоторого района составляет соответственно 4, 7, 5, 6, 4, 5, 3, 6, 4, 5, 5, 4, 6, 5 и 6 человек. Составить закон

распределения случайной величины X, определяемой как число фармацевтов в произвольно выбранной аптеке (из этих 15 аптек) и найти математическое ожидание, дисперсию среднее квадратическое отклонение этой величины.

3) К задаче № 1 составить функцию распределения, построить ее график и найти вероятность того, что количество яблок в произвольно выбранной корзине окажется более 10.

4) Имеется десять студенческих групп, насчитывающих соответственно 12, 10, 11, 8, 12, 9, 10, 8, 10 и 11 студентов.

а) составить закон распределения случайной величины X, определяемой как число студентов в наугад выбранной группе.

б) найти её функцию распределения F(x)

в) построить график F(x)

г) найти вероятность события $P(9<X\leq 11)$

д) найти M(X), D(X), σ (X). ***Задание 2. Схема независимых испытаний Бернулли. Распределение Пуассона.***

2. Принимая вероятность появления мальчика при рождении ребѐнка равной 0,5, найти вероятность того, что в семье с 6 детьми:

а) мальчиков нет, б) все дети – мальчики, в) 4 мальчика.

3. Вероятность осуществления некоторой химической реакции при проведении эксперимента равна 0,8. Найти вероятность того, что данная реакция произойдѐт в двух из семи проведѐнных экспериментов.

4. Вероятность заболевания гепатитом для жителя некоторой области составляет 0, 0005. Найти вероятность того, что из обследованных 10 000 жителей окажутся 4. Решить задачу двумя способами: с помощью а) распределения Бернулли и б) распределения Пуассона. Оценить точность распределения Пуассона. Решить задачи:

1. На сборку поступило 3000 деталей с первого станка и 2000 деталей со второго. Первый станок дает 0,3% брака, а второй - 0,25% брака. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь из не рассортированной продукции окажется бракованной. Какова вероятность того, что данная деталь изготовлена на втором станке?
2. Всхожесть семян некоторого растения составляет до 80%. Определить вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдут 4.
3. Случайная величина задана следующим законом распределения:

| X | 1 | 2 | 4 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | ? | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 |

Найти: 1) неизвестную вероятность; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) функцию распределения случайной величины F(X) и построить график функции распределения.

Решить задачи:

№ 1-22, 33-46, 55 (Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин, И. И. - 5е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 563-570).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Выберите правильный ответ:

1. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется
1.Корень квадратный из дисперсии.
2.Функция, равная вероятности того, что случайная величина приняла значение меньше заданного.
3.Функция, равная производной ее интегральной функции распределения.
4.Сумма произведений всех возможных значений величины X на вероятности этих значений.
2. Математическое ожидание постоянной величины C равно
1.0; 2.1; 3.C; 4.2
3. Дисперсией дискретной случайной величины называют
1) Функцию, равную вероятности того, что случайная величина приняла значение меньше заданного.; 2) Функцию, равную производной ее интегральной функции распределения; 3) Сумму произведений всех возможных значений величины X на вероятности этих значений; 4) Математическое ожидание квадрата разности случайной величины X и ее математического ожидания.
4. Дисперсия постоянной величины C равна
1.0; 2.1; 3.C; 4.2;
5. Средним квадратическим отклонением случайной величины называют
1) Сумму произведений всех возможных значений величины X на вероятности этих значений. 2) Математическое ожидание квадрата разности случайной величины X и ее математического ожидания.; 3) Корень квадратный из дисперсии.
6. Математическое ожидание случайной величины, подчиняющейся биномиальному распределению, равно
1.npq; 2.np; 3.0; 4. 1; 5.pq
7. Дисперсия случайной величины, подчиняющейся биномиальному распределению, равна
1.npq; 2.np; 3.0; 4. 1; 5.pq
8. Дискретной называют случайную величину, принимающую
1) Все значения из некоторого конечного или бесконечного интервала; 2) Отдельные друг от друга возможные значения с определенными вероятностями, которые можно пронумеровать.
9.Возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4. Вероятности этих значений 0,15; 0,3; 0,3; 0,2; 0,05. Вычислить ее математическое ожидание.
1. 0; 2. 1; 3. 1,5; 4. 1,7; 5.
1,9 Ответы на тесты.
1.4, 2.3, 3.4, 4.1, 5.3, 6.2, 7.1, 8.2, 9.4

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение)**

**1.Тема занятия № 33 и еѐ актуальность**. Функция распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, их свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Основные понятия и методы теории вероятности являются средствами решения задач физического, химического, биологического и иного характера, встречающихся как в процессе изучения профильных дисциплин, так и в дальнейшей профессиональной деятельности.

**2. Учебные цели**:

- научиться по функции распределения находить плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины и наоборот, вычислять числовые характеристики непрерывных случайных величин - научиться вычислять числовые характеристики нормальных случайных величин, вычислять вероятность попадания в интервал непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону, обучение обучающихся навыкам работы с большими массивами случайных величин.

Для формирования профессиональных компетенций студент должен **знать:**

- понятия функции и плотности распределения вероятности случайных величин.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- научиться определять числовые характеристики непрерывных случайных величин и вероятность попадания значений случайной величины в заданный интервал;
- оценить результаты лабораторных данных;
- быть готов эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научноисследовательских полевых и лабораторных биологических работ;
- строить их графики,
- определять числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение,
- находить с помощью функции распределения вероятность событий;
- определять вероятность попадания значений нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

и овладеть следующими **компетенциями:** способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы**: Вопросы для самоподготовки:

1. Что такое функция распределения непрерывной случайной величины?
2. Что называют математическим ожиданием непрерывной случайной величины?
3. Перечислите свойства математического ожидания.
4. Что называют дисперсией непрерывной случайной величины? Запишите формулу.
5. Перечислите свойства дисперсии случайной величины.
6. Что называют средним квадратическим отклонением? Запишите формулу.

7. Понятие непрерывной случайной величины.
8. Интегральная функция распределения случайной величины (определение).
9. Нахождение вероятности попадания случайной величины в заданный интервал через функцию распределения.
10. Дифференциальная функция распределения. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Условие нормировки.
11. Числовые характеристики непрерывных случайных величин, формулы для их нахождения. Вероятностный смысл математического ожидания. Назначение дисперсии и среднего квадратичного отклонения.
12. Закон нормального распределения, кривая Гаусса.
13. Нормированное нормальное распределение. Функция распределения нормированной нормально распределенной случайной величины.
14. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

**4. Вид занятия**: практическое занятие.

**5. Продолжительность занятия**: 3 часа.

**6. Оснащение:**

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

Задания для самоконтроля: решение студентами индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)\quad \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1 \\ ax \quad 1, \text{ если } 1 < x \le 3 \\ 1, \text{ еслих } > 3 \end{cases}$$

Требуется: а) найти постоянную а;
б) найти плотность распределения f(x); в) построить графики f(x) и F(x);
г) найти $P(1{,}5<x<2)$;
д) найти параметры распределения 3.
3. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu=15$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=1$. Найти интервалы для X, если вероятность интервала $| X - \mu| < \varepsilon$ равна 0,95.
Задание 1. Распределение непрерывной случайной величины и еѐ характеристики.
Задание 2. Нормальное распределение.

Типовые задачи.
1) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(X)=\begin{cases}0, \text{при } x \le 0\\ \sin x, \text{при } 0 < x \le \pi/2\\ 1, \text{при } x > \pi/2\end{cases}$$

Найти плотность распределения f (x).

2) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(X)=\begin{cases}0, \text{при } x \le 0\\ \sin 2x, \text{при } 0 < x \le \pi/4\\ 1, \text{при } x > \pi/4\end{cases}$$

Найти плотность распределения f (x).

3) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(X)=\begin{cases}0, \text{при } x \le 0\\ ax^2, \text{при } 0 < x \le 2\\ 1, \text{при } x > 2\end{cases}$$

Найти коэффициент a и плотность вероятности попадания случайной величины X в интервал (0; 1). 4) Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(X)=\begin{cases}0, \text{при } x \le 0\\ \cos x, \text{при } 0 < x \le \pi/2\\ 0, \text{при } x > \pi/2\end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x).

5) Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения f (x) =3sin3x в интервале (0; π /3); вне этого интервала f (x) = 0 . Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (π/6, π/4).

6) Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=2x в интервале [0,1]. Вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание, и среднее квадратичное отклонение величины X.

7) Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=x/2 в интервале [0,2]; вне этого интервала. f(x) = 0. Найти M(X) и D(X).

8) Случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = C($x^2$+2x) в интервале [0,1]; вне этого интервала. f(x)=0. Найти: а) параметр C; б) математическое ожидание величины X.

9) Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно μ = 3 и среднее квадратическое отклонение σ=2. Написать плотность вероятности X.

### 7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

К *непрерывным* относятся такие случайные величины, которые могут принимать на определенном интервале любые значения. Например, температура тела больного.

Для непрерывных случайных величин $M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ .

Для непрерывной случайной величины

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^2 \cdot f(x)dx$$

Определение. *Функцией распределения* случайной величины X называется функция F($x$), равная вероятности того, что случайная величина X приняла значение меньшее наперёд заданного $x$:

$$F(x) = p(X < x).$$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (1/4; 1).

Решение. Искомая вероятность равна приращению функции распределения на заданном интервале: P(1/4 < X <1) = F(1) – F(1/4).

Так как на интервале (1/4; 1), по условию, F($x$) = $x$/2, то F(1) – F(1/4) = 1/2 – 1/8 = 3/8. Итак, P(1/4 < X <1) = 3/8.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1.Для функции распределения непрерывной случайной величины F(x)= $\begin{cases} 0; x \le 0 \\ ax^3; 0 < x \le 1 \\ 1; x > 1 \end{cases}$ найти коэффициент а и плотность вероятности случайной величины X. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и вероятность попадания случайной величины X в интервал ]0;1/2[.

Ответ:a=1/2; f(x)= $\begin{cases} 0; x \le 0 \\ 3/2x^2; 0 < x \le 1 \\ 0; x > 1 \end{cases}$ M(X)=3/8; D(X)=0,36; $\sigma$=0,6; P(0<X<1/2)=1/16.

2. Плотность вероятности случайной величины равна f(x)=C sin2x в интервале (0; $\pi$/2); вне этого интервала f(x)=0. Найти постоянный параметр C и математическое ожидание случайной величины X. Ответ: C=1, M(X)=$\pi$. 3. Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал [a, b[ равна

1) Среднему значению функции распределения на этом интервале; 2) Разности между значениями функции распределения в правом и левом концах интервала ]a, b[; 3) Разности между значениями плотности вероятности в правом и левом концах интервала ]a, b[; 4) Среднему значению плотности вероятности на этом интервале.

4. Функция распределения случайной величины X: F(x)=x при 0<x≤2, F(x)=0 при x≤0, F(x)=1 при x>2. Определить вероятность попадания X в интервал ]0, 1[.

1.0; 2.1; 3.0,5; 4.0,9; 5.0,1

5. Функция распределения случайной величины X: $F(x)=x$ при $0<x\le 2$, $F(x)=0$ при $x\le 0$, $F(x)=1$ при $x>2$.

Определить математическое ожидание случайной величины X.

1.0; 2.1; 3.2; 4.1,5;

5.2,5 Ответы на тесты.

1.4, 2.1, 3.2, 4.2,

5.3 Решить задачи.

1) Случайная величина $X$ задана функцией:

$$F(X)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}x, & -1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases} \qquad \alpha=-2;\ \beta=0$$

Проверить, является ли заданная функция функцией распределения непрерывной случайной величины. При положительном ответе на этот вопрос найти: 1) дифференциальную функцию $f(x)$ ; 2) математическое ожидание случайной величины $X$ ; 3) дисперсию случайной величины $X$ и среднеквадратическое отклонение; 4) построить графики интегральной $F(X)$ и дифференциальной $f(x)$ функций; 5) определить вероятность попадания величины $X$ в интервал (0;1) двумя способами (используя интегральную и дифференциальную функции), а затем проиллюстрировать этот результат на графиках $F(X)$ и $f(x)$ .

2) Случайная величина $X$ распределена по нормальному закону с параметрами $m=0$; $\sigma=1$. Напишите выражение для плотности вероятности $f(x)$ и найдите вероятность события $(1{,}25<x<2{,}55)$. Решить задачи:

№ 23-32, 47-54 (Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 566-570).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий. Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение) (см. приложение)**:


1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 11, пар. 11.4-11.6 (с. 541-563).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 17, пар. 111-114 (с. 341-355).

**1.Тема занятия № 34 и еѐ актуальность**. Генеральная и выборочная совокупности. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Погрешности прямых и косвенных измерений.

Элементы статистики являются составной частью новой содержательной линии вузовского курса математики. Актуальность изучения статистики обусловлена тем, что статистические представления являются важнейшей составляющей интеллектуального багажа современного медика. Они нужны и для повседневной жизни в современном цивилизованном обществе, и для продолжения образования практически во всех сферах человеческой деятельности, особенно, в медицине.

**2. Учебные цели**:

- закрепить основные понятия математической статистики; научиться выполнять первичный статистический анализ выборочных данных.

Для формирования профессиональных компетенций студент должен **знать:**

- метод наименьших квадратов;
- формулы для нахождения коэффициентов линейного и квадратического тренда;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- применять метод наименьших квадратов для нахождения коэффициентов линейного и квадратического тренда;
- составлять уравнения линейного и квадратического тренда;
- применять методы сглаживания временного ряда;
- составлять линейную и квадратическую модель прогноза

и овладеть следующими **компетенциями:** способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы**: Вопросы для самоподготовки:

1. Понятие генеральной совокупности; методы исследования генеральной совокупности;
2. Выборочная совокупность; репрезентативность и объем выборки;
3. Группировка выборочных данных: построение ранжированного вариационного ряда распределения; составление равноинтервального ряда распределения;
4. Построение графиков вариационных рядов;
5. Понятие об ошибках репрезентативности;
6. Доверительный интервал и доверительная вероятность;
7. Оценка параметров генеральной совокупности по выборочным данным: точечная и интервальная оценка. 8. Уравнение регрессии

9. Коэффициенты корреляции

10.Нулевая и конкурентная гипотезы

4. **Вид занятия**: практическое занятие.

5. **Продолжительность занятия**: 3 часа.

6. **Оснащение:**

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа, таблицы, графики.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

Задания для самоконтроля: решение студентами индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1). Статистическое распределение - это:

1. Совокупность вариант; 2. Относительная частота вариант; 3. Совокупность вариант и соответствующих им частот; 4. Совокупность данных и закон их распределения; 5. Совокупность данных.

2). Распределение может быть:

1. Одномодальным; 2. Двумодальным; 3. Многомодальным; 4. Среди ответов 1-3 нет верного; 5. Вопрос не по существу

3). Выборочного среднего определяется по формулам

а) $S=\sqrt{S^2}$ ; б) $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ; в) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ; г) $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 m_i$ ; д) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i m_i$ е) $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ .

4). Выборочная дисперсия определяется по формулам

а) $S=\sqrt{S^2}$ ; б) $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ; в) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ; г) $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 m_i$ ; д) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i m_i$ е) $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ .

5). Величина нормированного отклонения (распределение Стьюдента) зависит от а) Уровня значимости; б) Выборочного среднего; в)Ошибки выборочного среднего;

г) Объема выборки; д) От уровня значимости и от объѐма выборки.

6). Для интервала оценки необходимо знать:

1. X, t, S; 2. X, t, S, n; 3. $\bar{X}$, S, , n; 4. X, t, т; 5.t, S, m

7). Характеристики положения случайной величины:

1. Дисперсия; 2. Мода; 3. Среднее квадратическое отклонение; 4. Выборочное среднее; 5. Медиана.

8). Характеристики рассеяния:

1. Дисперсия; 2. Мода; 3. Среднее квадратическое отклонение; 4. Выборочное среднее; 5. Медиана.

9). Сумма всех относительных частот равна

1. единице; 2. объему выборки; 3. 100; 4. 10; 5. 0.

Типовые задачи.

1) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(X)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \sin x, \text{при } 0 < x \le \pi/2 \\ 1, \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

$$F(X)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \sin 2x, \text{при } 0 < x \le \pi/4 \\ 1, \text{при } x > \pi/4 \end{cases}$$

Найти плотность распределения f (x).

2) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

Найти плотность распределения f (x).

3) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(X)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ ax^2, \text{при } 0 < x \le 2 \\ 1, \text{при } x > 2 \end{cases}$$

$$f(X)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \cos x, \text{при } 0 < x \le \pi/2 \\ 0, \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Найти коэффициент a и плотность вероятности попадания случайной величины X в интервал (0; 1). 4) Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

Найти функцию распределения F(x).

5) Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения f (x) =3sin3x в интервале (0; π /3); вне этого интервала f (x) = 0 . Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (π/6, π/4).

6) Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=2x в интервале [0,1]. Вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание, и среднее квадратичное отклонение величины X.

7) Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=x/2 в интервале [0,2]; вне этого интервала. f(x) = 0. Найти M(X) и D(X).

8) Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = C(x^2+2x)$ в интервале [0,1]; вне этого интервала. f(x)=0. Найти: а) параметр C; б) математическое ожидание величины X.

9) Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно μ = 3 и среднее квадратическое отклонение σ=2. Написать плотность вероятности X.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

**Линейная регрессия, корреляция**

Статистическая зависимость величины Y от величины X - это такая зависимость, при которой каждому значению величины X из множества ее возможных значений соответствует некоторое множество возможных значений величины Y, характеризуемое определенным законом распределения. Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость между величинами, когда изменение одной из величин влечет изменение математического ожидания другой.

Корреляционную зависимость Y от X можно описать с помощью уравнения вида: M(Y)x = f(x), где M(Y)x – условное математическое ожидание величины Y, соответствующее данному значению x; f(x) – некоторая функция.

Если функция f(x) линейная, то уравнение регрессии можно записать в виде: M(Y)x = Ax + B, где A и B – параметры.

Корреляционная таблица содержит всю информацию, полученную в результате выборочных наблюдений.

| yj xi | x1 | x2 | ... | xk | ny |
|---|---|---|---|---|---|
| y1 | n11 | n21 | ... | nk1 | ny1 |
| y2 | n12 | n22 | ... | nk2 | ny2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| yl | n1l | n2l | ... | nkl | nyl |
| nx | nx1 | nx2 | ... | nxk | N |

С помощью корреляционной таблицы для каждого значения xi можно записать соответствующее распределение величины Y.

В случаях, когда существует линейная зависимость между величинами X и Y, для описания корреляционной зависимости вводятся выборочные уравнения линейной регрессии: $\overline{Y}_x = \rho_{yx} x + b$, где ух –

выборочный коэффициент регрессии, имеющий смысл выборочной оценки коэффициента А (см. формулу

4.17), условное среднее $\overline{Y}_x$ является оценкой условного математического ожидания M(Y)x, а параметр b – оценкой B.

Для полного описания корреляционной связи недостаточно найти форму корреляционной зависимости между величинами, необходимо еще определить силу этой зависимости по величине коэффициентов регрессии. Для количественной характеристики силы (тесноты) связи вводится понятие выборочного коэффициента линейной корреляции, определяемого отношением: $r = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sigma_x \sigma_y}$, или $r = \rho_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, или $r = \rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$.

Пример 4.5. Пользуясь данными примера 4.4, найти выборочный коэффициент корреляции между массой таблетки и скоростью ее растворения.

Решение: воспользовавшись формулой (4.22), найдем коэффициент r:

$$r = \frac{40,5 - 15\cdot 2,35}{\sqrt{50\cdot 0,7025}} = \frac{40,5 - 35,25}{\sqrt{35,125}} = \frac{5,25}{5,93} = 0,885$$

## Проверка статистических гипотез

1. Проверка значимости выборочного коэффициента линейной корреляции. После вычисления выборочного коэффициента линейной корреляции r всегда возникает необходимость проверки гипотезы о наличии существенности линейной корреляционной зависимости между изучаемыми величинами, или

$$= r\frac{\sqrt{\;-\;}}{\sqrt{1-r^2}}$$

гипотезы о значимости выборочного коэффициента линейной корреляции. Для этого, предполагая, что величины X и Y распределены по нормальному закону, вычисляют экспериментальное значение критерия: $n\ 2\ t_{эксп}$, где n – объем выборки (N).

Далее по таблице критических значений распределения Стьюдента (таблица 4 Приложения) при заданном уровне значимости p (с заданной вероятностью $\gamma$ = 1 – p) и числе степеней свободы f = n – 2 находят критическое значение критерия: tкр = t(f).
Если |tэксп| >tкр, то выборочный коэффициент значим.

2. Проверка статистической гипотезы о равенстве средних значений двух произвольно распределенных случайных величин по их оценкам. Большие независимые выборки (n $\geq$ 30)

Пусть рассматриваются две случайные величины x и y и по результатам выборочных измерений этих величин требуется проверить так называемую нулевую гипотезу о равенстве их средних значений. Сначала рассчитывается экспериментальное значение критерия:

$$Z_{эксп} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}}$$

, где $\bar{x}, \bar{y}$ – выборочные средние величин x и y, nx, ny – объемы выборок величин x и y, $S_x^2, S_y^2$ – оценки дисперсий величин x и y. Затем находится критическое значение критерия:

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1 - p}{2}$$

, где Ф(Z) – функция Лапласа (таблица 3 Приложения), p – заданный уровень значимости.

После этого сравниваются полученные значения, и если |Zэксп| <Zкр, то при заданном уровне p делают вывод о равенстве средних значений $\bar{x}, \bar{y}$ .

3. Проверка статистической гипотезы о равенстве средних значений двух нормально распределенных случайных величин. Малые независимые выборки (n< 30)

Если известно, что величины X и Y – нормально распределенные и их генеральные дисперсии равны (или оценки дисперсий различаются незначимо), то для проверки гипотезы используется следующий метод. Сначала рассчитывается экспериментальное значение критерия:

$$t_{эксп} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}$$

Затем находят критическое значение критерия: $t_{кр} = t(p; f)$ , где t(p; f) – находится по таблице распределения Стьюдента (таблица 5 Приложения), где p – уровень значимости, f = nx + ny – 2.

После этого полученные значения сравниваются, и если |tэксп| <tкр, то гипотеза о равенстве средних значений при заданном p является согласующейся с результатами наблюдений.

4. Проверка статистической гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных величин по их оценкам

Пусть по результатам наблюдений двух нормально распределенных случайных величин x и y (объемы выборок nx и ny) найдены оценки их дисперсий Sx2 и Sy2. Для проверки значимости различия между ними выдвигается нулевая гипотеза о равенстве дисперсий ( x2 = y2). Задается уровень значимости p, с которым проводится проверка. Вычисляется экспериментальное значение критерия:

$F_{эксп.} = \frac{S^2_б}{S^2_м}$, т.е. отношение большей из оценок дисперсий к меньшей. Затем по таблице критических значений распределения Фишера-Снедекора (таблица 6 Приложения) при заданном уровне значимости p находят критическое значение критерия:

$F_{kp} = F\left(\frac{p}{2}; f_1; f_2\right)$, где f1 = nб – 1, f2 = nм – 1 (nб, nм – объемы выборок с большей и меньшей дисперсией соответственно).

Если Fэксп<Fкр, то нулевая гипотеза считается согласующейся с результатами наблюдений.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи.

Задача 1. Частота пульса по данным медицинского осмотра 17 девочек-первоклассниц: 76 76 70 66 68 70 72 74 76 78 70 82 68 74 70 70 70. Найти по выборочным данным точечные оценки параметров генеральной совокупности и оценить истинное значение генерального среднего с доверительной вероятностью 0.95.

Задача 2. В книге "Основы химии" Д.И. Менделеева приводятся данные о растворимости азотнокислого натрия в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных $NaNO_3$ (Y) при соответствующих температурах (X) раствора:
частей

| X | 0 | 4 | 10 | 15 | 21 | 29 | 36 | 51 | 68 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 66,7 | 71,0 | 76,3 | 80,6 | 85,7 | 92,9 | 99,4 | 113,6 | 125,1 |

Постройте корреляционное поле.

Предполагая, что зависимость между X и Y близка к линейной, найдите выборочный коэффициент парной корреляции и оцените достоверность выборочного значения коэффициента парной корреляции. Найдите уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Постройте линии регрессии. Используя соответствующие

$NaNO^3$ и
какова уравнения регрессии, найдите, при какой температуре раствориться 100 условных частей $NaNO^3$, если растворилось 84 условных частей. температура раствора

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение) (**

**1.Тема занятия № 35 и еѐ актуальность**. Статистическая, корреляционная и функциональная зависимости. Уравнения линейной регрессии.

Элементы статистики являются составной частью новой содержательной линии вузовского курса математики. Актуальность изучения статистики обусловлена тем, что статистические представления являются важнейшей составляющей интеллектуального багажа современного медика. Они нужны и для повседневной жизни в современном цивилизованном обществе, и для продолжения образования практически во всех сферах человеческой деятельности, особенно, в медицине.

**2. Учебные цели**:

- закрепить основные понятия математической статистики; научиться выполнять первичный статистический анализ выборочных данных.

Для формирования профессиональных компетенций студент должен **знать:**

- метод наименьших квадратов;
- формулы для нахождения коэффициентов линейного и квадратического тренда;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- применять метод наименьших квадратов для нахождения коэффициентов линейного и квадратического тренда;
- составлять уравнения линейного и квадратического тренда;
- применять методы сглаживания временного ряда;
- составлять линейную и квадратическую модель прогноза

и овладеть следующими **компетенциями:** способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы**: Вопросы для самоподготовки:

1. Понятие генеральной совокупности; методы исследования генеральной совокупности;
2. Выборочная совокупность; репрезентативность и объем выборки;
3. Группировка выборочных данных: построение ранжированного вариационного ряда распределения; составление равноинтервального ряда распределения;
4. Построение графиков вариационных рядов;
5. Понятие об ошибках репрезентативности;
6. Доверительный интервал и доверительная вероятность;
7. Оценка параметров генеральной совокупности по выборочным данным: точечная и интервальная оценка. 8. Уравнение регрессии

9. Коэффициенты корреляции

4. **Вид занятия**: практическое занятие.

5. **Продолжительность занятия**: 3 часа.

6. **Оснащение:**

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа, таблицы, графики.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

Задания для самоконтроля: решение студентами индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1). Статистическое распределение - это:

1. Совокупность вариант; 2. Относительная частота вариант; 3. Совокупность вариант и соответствующих им частот; 4. Совокупность данных и закон их распределения; 5. Совокупность данных.

2). Распределение может быть:

1. Одномодальным; 2. Двумодальным; 3. Многомодальным; 4. Среди ответов 1-3 нет верного; 5. Вопрос не по существу

3). Выборочного среднего определяется по формулам: $=\sqrt{S^2}$; б) $S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$; в) $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$.

а) S x ; г) S =2 n1 n (x -xi)2 mi ;

д) x n1 i 1n x mi i

i=1

е) S =$^2$

4). Выборочная дисперсия определяется по формулам: $=\sqrt{S^2}$; б) $S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$; в) $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$.

$^2$ 1 n $\sum$ (x -x) m$_i$ $\overline{\ }$ = – $\sum$

1 n x m$_i$ $_i$ =

$_i$ ;д) x

а) S x ;г) S =

n i=1 n i 1 е) S =$^2$

5). Величина нормированного отклонения (распределение Стьюдента) зависит от а) Уровня значимости; б) Выборочного среднего; в)Ошибки выборочного среднего;

г) Объема выборки; д) От уровня значимости и от объѐма выборки.

6). Для интервала оценки необходимо знать:

1. X, t, S; 2. X, t, S, n; 3. X, S, , n; 4. X, t, т; 5.t, S, m

7). Характеристики положения случайной величины:

1. Дисперсия; 2. Мода; 3. Среднее квадратическое отклонение; 4. Выборочное среднее; 5. Медиана.

8). Характеристики рассеяния:

1. Дисперсия; 2. Мода; 3. Среднее квадратическое отклонение; 4. Выборочное среднее; 5. Медиана.

9). Сумма всех относительных частот равна

1. единице; 2. объему выборки; 3. 100; 4. 10; 5. 0.

Типовые задачи.

1) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(X) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \sin x, \text{при } 0 < x \le \pi/2 \\ 1, \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

F X

$$= \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \sin 2x, \text{при } 0 < x \le \pi/4 \\ 1, \text{при } x > \pi/4 \end{cases}$$

Найти плотность распределения f (x).

2) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

Найти плотность распределения f (x).

3) Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$= \begin{cases} 0, \text{ при } x \; 0 \; F \; X \;\; ax , \text{ при } 0^2 \quad x \qquad 2 \; 1, \text{ при} \\ \\ x \; 2 \end{cases}$$

$$f(X) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \cos x, \text{при } 0 < x \le \pi/2 \\ 0, \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Найти коэффициент a и плотность вероятности попадания случайной величины X в интервал (0; 1). 4) Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

Найти функцию распределения F(x).

5) Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 3\sin 3x$ в интервале (0; π /3); вне этого интервала f (x) = 0 . Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (π/6, π/4).

6) Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=2x в интервале [0,1]. Вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание, и среднее квадратичное отклонение величины X.

7) Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=x/2 в интервале [0,2]; вне этого интервала. f(x) = 0. Найти M(X) и D(X).

8) Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = C(x^2+2x)$ в интервале [0,1]; вне этого интервала. f(x)=0. Найти: а) параметр С; б) математическое ожидание величины X.

9) Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно μ = 3 и среднее квадратическое отклонение σ=2. Написать плотность вероятности X.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

## Линейная регрессия, корреляция

Статистическая зависимость величины Y от величины X - это такая зависимость, при которой каждому значению величины X из множества ее возможных значений соответствует некоторое множество возможных значений величины Y, характеризуемое определенным законом распределения. Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость между величинами, когда изменение одной из величин влечет изменение математического ожидания другой.

Корреляционную зависимость Y от X можно описать с помощью уравнения вида: M(Y)x = f(x), где M(Y)x – условное математическое ожидание величины Y, соответствующее данному значению x; f(x) – некоторая функция.

Если функция f(x) линейная, то уравнение регрессии можно записать в виде: M(Y)x = Ax + B, где A и B – параметры.

Корреляционная таблица содержит всю информацию, полученную в результате выборочных наблюдений.

| yj xi | x1 | x2 | … | xk | ny |
|---|---|---|---|---|---|
| y1 | n11 | n21 | … | nk1 | ny1 |
| y2 | n12 | n22 | … | nk2 | ny2 |
| … | … | … | … | … | … |
| yl | n1l | n2l | … | nkl | nyl |
| nx | nx1 | nx2 | … | nxk | N |

С помощью корреляционной таблицы для каждого значения xi можно записать соответствующее распределение величины Y.

В случаях, когда существует линейная зависимость между величинами X и Y, для описания корреляционной зависимости вводятся выборочные уравнения линейной регрессии: $\overline{Y}_x = \rho_{yx} x + b$, где $\rho_{yx}$ – выборочный коэффициент регрессии, имеющий смысл выборочной оценки коэффициента A (см. формулу 4.17), условное среднее $\overline{Y}_x$ является оценкой условного математического ожидания M(Y)x, а параметр b – оценкой B.

Для полного описания корреляционной связи недостаточно найти форму корреляционной зависимости между величинами, необходимо еще определить силу этой зависимости по величине коэффициентов регрессии. Для количественной характеристики силы (тесноты) связи вводится понятие выборочного коэффициента линейной корреляции, определяемого отношением: $r = \dfrac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sigma_x \sigma_y}$, или $r = \rho_{yx}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$, или $r = \rho_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$.

Пример 4.5. Пользуясь данными примера 4.4, найти выборочный коэффициент корреляции между массой таблетки и скоростью ее растворения.

Решение: воспользовавшись формулой (4.22), найдем коэффициент r:

$$r = \frac{40{,}5 - 15 \cdot 2{,}35}{\sqrt{50 \cdot 0{,}7025}} = \frac{40{,}5 - 35{,}25}{\sqrt{35{,}125}} = \frac{5{,}25}{5{,}93} = 0{,}885$$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Задача. В книге "Основы химии" Д.И. Менделеева приводятся данные о растворимости азотнокислого натрия в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных частей $NaNO_3$ (Y) при соответствующих температурах (X) раствора:

| X | 0 | 4 | 10 | 15 | 21 | 29 | 36 | 51 | 68 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 66,7 | 71,0 | 76,3 | 80,6 | 85,7 | 92,9 | 99,4 | 113,6 | 125,1 |

Постройте корреляционное поле.

Предполагая, что зависимость между X и Y близка к линейной, найдите выборочный коэффициент парной корреляции и оцените достоверность выборочного значения коэффициента парной корреляции. Найдите уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Постройте линии регрессии. Используя соответствующие уравнения регрессии, найдите, при какой температуре раствориться 100 условных частей $NaNO_3$ и какова температура раствора $NaNO_3$, если растворилось 84 условных частей.

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение) (см. приложение)**:

**1.Тема занятия № 36 и еѐ актуальность**. Коэффициент линейной корреляции, его свойства. Расчет выборочного коэффициента линейной корреляции.

Элементы статистики являются составной частью новой содержательной линии вузовского курса математики. Актуальность изучения статистики обусловлена тем, что статистические представления являются важнейшей составляющей интеллектуального багажа современного медика. Они нужны и для повседневной жизни в современном цивилизованном обществе, и для продолжения образования практически во всех сферах человеческой деятельности, особенно, в медицине.

1. **Учебные цели**:

- закрепить основные понятия математической статистики; научиться выполнять первичный статистический анализ выборочных данных.

Для формирования профессиональных компетенций студент должен **знать:**

- метод наименьших квадратов;
- формулы для нахождения коэффициентов линейного и квадратического тренда;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- применять метод наименьших квадратов для нахождения коэффициентов линейного и квадратического тренда;
- составлять уравнения линейного и квадратического тренда;
- применять методы сглаживания временного ряда;
- составлять линейную и квадратическую модель прогноза

и овладеть следующими **компетенциями:** способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

3. **Материалы для самоподготовки к освоению данной темы**:

Вопросы для самоподготовки:

4. **Вид занятия**: практическое занятие. **5. Продолжительность занятия**: 2 час

6. **Оснащение:**

   6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа, таблицы, графики.

   6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. **Содержание занятия:**

Задания для самоконтроля: решение студентами индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

   7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Типовые задачи.

   7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

**Линейная регрессия, корреляция**

Статистическая зависимость величины Y от величины X - это такая зависимость, при которой каждому значению величины X из множества ее возможных значений соответствует некоторое множество возможных значений величины Y, характеризуемое определенным законом распределения. Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость между величинами, когда изменение одной из величин влечет изменение математического ожидания другой.

Корреляционную зависимость Y от X можно описать с помощью уравнения вида: M(Y)x = f(x), где M(Y)x – условное математическое ожидание величины Y, соответствующее данному значению x; f(x) – некоторая функция.

Если функция f(x) линейная, то уравнение регрессии можно записать в виде: M(Y)x = Ax + B, где A и B – параметры. Корреляционная таблица содержит всю информацию, полученную в результате выборочных наблюдений.

| yj xi | x1 | x2 | · · · | xk | ny |
|---|---|---|---|---|---|
| y1 | n11 | n21 | · · · | nk1 | ny1 |
| y2 | n12 | n22 | ··· | nk2 | ny2 |
| · · · | · · · | · · · | · · · | · · · | · · · |
| yl | n1l | n2l | ··· | nkl | nyl |
| nx | nx1 | nx2 | · · · | nxk | N |

С помощью корреляционной таблицы для каждого значения xi можно записать соответствующее распределение величины Y.

В случаях, когда существует линейная зависимость между величинами X и Y, для описания корреляционной зависимости вводятся выборочные уравнения линейной регрессии: $\overline{Y}_x = \rho_{yx} x + b$, где ух – выборочный коэффициент регрессии, имеющий смысл выборочной оценки коэффициента A (см. формулу 4.17), условное среднее $\overline{Y}_x$ является оценкой условного математического ожидания M(Y)x, а параметр b – оценкой B.

Для полного описания корреляционной связи недостаточно найти форму корреляционной зависимости между величинами, необходимо еще определить силу этой зависимости по величине коэффициентов регрессии. Для количественной характеристики силы (тесноты) связи вводится понятие выборочного коэффициента линейной корреляции, определяемого отношением: $r = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sigma_x \sigma_y}$, или $r = \rho_{yx} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, или $r = \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 4.5. Пользуясь данными примера 4.4, найти выборочный коэффициент корреляции между массой таблетки и скоростью ее растворения.

Решение: воспользовавшись формулой (4.22), найдем коэффициент r:

$$r = \frac{40{,}5 - 15 \cdot 2{,}35}{\sqrt{50 \cdot 0{,}7025}} = \frac{40{,}5 - 35{,}25}{\sqrt{35{,}125}} = \frac{5{,}25}{5{,}93} = 0{,}885$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Задача. В книге "Основы химии" Д.И. Менделеева приводятся данные о растворимости азотнокислого натрия в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных частей $NaNO_3$ (Y) при соответствующих температурах (X) раствора:

| X | 0 | 4 | 10 | 15 | 21 | 29 | 36 | 51 | 68 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 66,7 | 71,0 | 76,3 | 80,6 | 85,7 | 92,9 | 99,4 | 113,6 | 125,1 |

Постройте корреляционное поле.

Предполагая, что зависимость между X и Y близка к линейной, найдите выборочный коэффициент парной корреляции и оцените достоверность выборочного значения коэффициента парной корреляции. Найдите уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Постройте линии регрессии. Используя соответствующие уравнения регрессии, найдите, при какой температуре раствориться 100 условных частей $NaNO_3$ и какова температура раствора $NaNO_3$, если растворилось 84 условных частей.

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

**8. Литература (см. приложение)**

**1.Тема занятия № 37 и её актуальность**. Проверка статистических гипотез.

Элементы статистики являются составной частью новой содержательной линии вузовского курса математики. Актуальность изучения статистики обусловлена тем, что статистические представления являются важнейшей составляющей интеллектуального багажа современного медика. Они нужны и для повседневной жизни в современном цивилизованном обществе, и для продолжения образования практически во всех сферах человеческой деятельности, особенно, в медицине.

**2. Учебные цели**:

- закрепить основные понятия математической статистики; научиться проверять первичные статистические гипотезы.

Для формирования профессиональных компетенций студент должен **знать:**

- метод наименьших квадратов;
- формулы для нахождения коэффициентов линейного и квадратического тренда;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- применять метод наименьших квадратов для нахождения коэффициентов линейного и квадратического тренда;
- составлять уравнения линейного и квадратического тренда;
- применять методы сглаживания временного ряда;
- составлять линейную и квадратическую модель прогноза

и овладеть следующими **компетенциями:** способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

**3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы**: Вопросы для самоподготовки:

1. Понятие генеральной совокупности; методы исследования генеральной совокупности;
2. Выборочная совокупность; репрезентативность и объем выборки;

3. Группировка выборочных данных: построение ранжированного вариационного ряда распределения; составление равноинтервального ряда распределения;
4. Построение графиков вариационных рядов;
5. Понятие об ошибках репрезентативности;
6. Доверительный интервал и доверительная вероятность;
7. Оценка параметров генеральной совокупности по выборочным данным: точечная и интервальная оценка. 8. Уравнение регрессии

9. Коэффициенты корреляции

10.Нулевая и конкурентная гипотезы

**4. Вид занятия**: практическое занятие. **5. Продолжительность занятия**: 2 часа

**6. Оснащение:**

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа, таблицы, графики.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

**7. Содержание занятия:**

Задания для самоконтроля: решение студентами индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

**Проверка статистических гипотез**

1. Проверка значимости выборочного коэффициента линейной корреляции. После вычисления выборочного коэффициента линейной корреляции r всегда возникает необходимость проверки гипотезы о наличии существенности линейной корреляционной зависимости между изучаемыми величинами, или гипотезы о значимости выборочного коэффициента линейной корреляции. Для этого, предполагая, что величины X и Y распределены по нормальному закону, вычисляют экспериментальное значение критерия:

$$t_{эксп} = r\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$ где n – объем выборки (N).

Далее по таблице критических значений распределения Стьюдента (таблица 4 Приложения) при заданном уровне значимости p (с заданной вероятностью $\gamma$ = 1 – p) и числе степеней свободы f = n – 2 находят критическое значение критерия: $t_{кр} = t(f)$.

Если $|t_{эксп}| > t_{кр}$, то выборочный коэффициент значим.

2. Проверка статистической гипотезы о равенстве средних значений двух произвольно распределенных случайных величин по их оценкам. Большие независимые выборки (n 30)

Пусть рассматриваются две случайные величины x и y. По результатам выборочных измерений этих величин требуется проверить так называемую нулевую гипотезу о равенстве их средних значений. Сначала

$\bar{x}\ \bar{y}$ $\quad \bar{x}\ \bar{y},$ –

выборочные

рассчитывается экспериментальное значение критерия: $Z_{эксп} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_x} + \dfrac{S_y^2}{n_y}}}$, где $\bar{x}, \bar{y}$ – средние величин x и y, $n_x$, $n_y$ – объемы выборок величин x и y, $S_x^2$, $S_y^2$ – оценки дисперсий величин x и y.

Затем находится критическое значение критерия: $\Phi(Z_{кр}) = 1 - p$, где $\Phi(Z)$ – функция Лапласа (таблица 3 2 Приложения), p – заданный уровень значимости. После этого сравниваются полученные значения, и если

$|Z_{эксп}| < Z_{кр}$, то при заданном уровне p делают вывод о равенстве средних значений $\bar{x}$ $\bar{y}$.

3. Проверка статистической гипотезы о равенстве средних значений двух нормально распределенных случайных величин. Малые независимые выборки (n< 30)

Если известно, что величины X и Y – нормально распределенные и их генеральные дисперсии равны (или оценки дисперсий различаются незначимо), то для проверки гипотезы используется следующий метод.

Сначала рассчитывается экспериментальное значение критерия:

$$t_{эксп} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}$$

Затем находят критическое значение критерия: $t_{кр} = t(p; f)$, где t(p; f) – находится по таблице распределения Стьюдента (таблица 5 Приложения), где p – уровень значимости, $f = n_x + n_y - 2$.

После этого полученные значения сравниваются, и если $|t_{эксп}| < t_{кр}$, то гипотеза о равенстве средних значений при заданном p является согласующейся с результатами наблюдений.

4. Проверка статистической гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных величин по их оценкам

Пусть по результатам наблюдений двух нормально распределенных случайных величин x и y (объемы выборок $n_x$ и $n_y$) найдены оценки их дисперсий $S_x^2$ и $S_y^2$. Для проверки значимости различия между ними выдвигается нулевая гипотеза о равенстве дисперсий ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2$). Задается уровень значимости p, с которым проводится проверка. Вычисляется экспериментальное значение критерия:

$F_{эксп} = \dfrac{S_б^2}{S_м^2}$, т.е. отношение большей из оценок дисперсий к меньшей. Затем по таблице критических значений распределения Фишера-Снедекора (таблица 6 Приложения) при заданном уровне значимости p находят критическое значение критерия:

$F_{kp} = F\left(\frac{p}{2};\ f_1;\ f_2\right)$, где $f_1 = n_б - 1$, $f_2 = n_м - 1$ ($n_б$, $n_м$ – объемы выборок с большей и меньшей дисперсией соответственно).

Если $F_{эксп}<F_{кр}$, то нулевая гипотеза считается согласующейся с результатами наблюдений.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

**Гипотеза о равенстве среднего значения числу**

**Пример 1.** Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют средний диаметр 10 мм. Используя односторонний критерий с α=0,05, проверить эту гипотезу, если в выборке из n шариков средний диаметр оказался равным 10,3 мм, а дисперсия известна и равна 1 мм. Решение. Нулевая гипотеза: $H_0$ : μ=10 . Альтернативная гипотеза (односторонняя) $H_1$ : μ>10. Вычисляем

наблюдаемое значение критерия $U_{наблюд.} = \frac{x - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{10{,}3 - 10}{1}\sqrt{16} = 1{,}2$ . По таблице функции Лапласа найдем критическую точку для односторонней критической области (при гипотезе $H_1$ : μ>10) по уровню значимости α = 0,05 : $\Phi(u_{kp}) = \frac{1-2\alpha}{2} = 0{,}45$ , откуда $u_{кр}$ ≈1,645. Так как

$U_{наблюд}$=1,2< $u_{кр}$ ≈1,645 то нулевую

гипотезу можно принять, можно считать что средний диаметр действительно $d_0$ =10 мм.

**Пример 2.** Продавец утверждает, что средний вес пачки чая составляет 100 г. Из партии извлечена выборка и взвешена. Вес каждой пачки - 98, 104, 97, 97, 101, 100, 99, 101, 99, 98. Не противоречит ли это утверждению продавца? Доверительная вероятность 99%. Вес пачек чая распределен нормально.

$$= \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{994}{10} = 99{,}4$$

Исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1} = \frac{42{,}4}{9} = 4{,}71$ . Выборочное исправленное среднеквадратичное отклонение: S ≈ 2,171. Расчеты в таблице:

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i n_i$ | $(x_i-\bar{x})^2 n_i$ |
|---|---|---|---|
| 97 | 2 | 194 | 11,52 |
| 98 | 2 | 196 | 3,92 |
| 99 | 2 | 198 | 0,32 |
| 100 | 1 | 100 | 0,36 |
| 101 | 2 | 202 | 5,12 |
| 104 | 1 | 104 | 21,16 |
| Сумма | 10 | 994 | 42,4 |

Введем нулевую гипотезу $H_0$ : a=100 при конкурирующей гипотезе $H_1$: a ≠100 . Вычисляем наблюдаемое значение критерия

$T_{наблюд.} = \frac{x-\mu}{S}\sqrt{n} = \frac{99{,}4 - 100}{2{,}171}\sqrt{10} = -0{,}87$ . По таблице критических точек распределения Стьюдента

Решение. Вычислим показатели выборки. $x$ найдем критическую точку по уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $k = 9$ , откуда $t_{кр} \approx 3,25$ . Так как $|T_{наблюд.}| = 0,87 < 3,25 = t_{кр.}$ , то нулевую гипотезу о равенстве среднего веса 100 г можно принять.

**Гипотеза о равенстве дисперсии числу Пример 3.** По результатам n=7n=7 независимых измерений найдено, что x‾‾‾=82,48x‾=82,48 мм, а S=0,08 мм. Допустив, что ошибки измерения имеют нормальное распределение проверить на уровнезначимости α=0,05α=0,05 гипотезу H0:σ2=0,01H0:σ2=0,01 мм22. против конкурирующей гипотезы H0:σ2=0,005H0:σ2=0,005 мм22. В ответе записать разность между фактическим и табличным значениями выборочной характеристики.

Вычисляем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{6 \cdot 0,08^2}{0,01} = 3,84 .$$

Вычисляем критическое значение $\chi^2_{кр}(1-\alpha; n-1) = \chi^2_{кр}(0,95;6) = 12,583$ .

Так как $\chi^2_{кр} = 12,583 > 3,84 = \chi^2_{набл}$ , нулевую гипотезу следует отвергнуть.

Разность между фактическим и табличным значениями $3,84 - 12,583 = -8,743$ .

Ответ: -8,743

**Пример 4.** Компания не осуществляет инвестиционных вложений в ценные бумаги с дисперсией годовой доходности более чем 0,04. Выборка из 52 наблюдений по активу А показала, что выборочная дисперсия ее доходности равна 0,045.Выяснить, допустимы ли для данной компании инвестиционные вложения в актив А на уровне значимости: а) 0,05; б) 0,01.

Решение. Нулевая гипотеза задачи $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,04$ . Конкурирующая гипотеза: $H_1: \sigma^2 > 0,04$ .

Вычисляем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(52-1)\cdot 0,045}{0,04} = 57,375 .$$

Конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: \sigma^2 > 0,04$ , поэтому критическая область правосторонняя.

А) По таблице вычисляем критическое значение $\chi^2_{кр}(\alpha; n-1) = \chi^2_{кр}(0,05;51) = 68,669$ .

Так как $\chi^2_{набл} = 57,375 < 68,669 = \chi^2_{кр}$ , можно принять нулевую гипотезу на данном уровне значимости 0,05.

Б) По таблице вычисляем критическое значение $\chi^2_{кр}(\alpha; n-1) = \chi^2_{кр}(0,01;51) = 77,386$ .

Так как $\chi^2_{набл} = 57,375 < 77,386 = \chi^2_{кр}$ , можно принять нулевую гипотезу на данном уровне значимости 0,01.

Таким образом и на уровне значимости 0,05, и на уровне значимости 0,01, для компании инвестиционные вложения в актив А допустимы.

**Гипотеза о равенстве вероятности числу**

**Пример 5.** Фирма рассылает рекламные каталоги возможным заказчикам. Как показал опыт, вероятность того, что организация получившая каталог, закажет рекламируемое изделие, равна 0,08. Фирма разослала 1000 каталогов новой, улучшенной, формы и получила 100 заказов. На уровне значимости 0,05 выяснить, можно ли считать, что новая форма рекламы существенно лучше прежней.

Введем нулевую гипотезу $H_0: \ p = p_0 = 0,08$ при конкурирующей гипотезе $H_1: p > 0,08$.
Вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле:

$$U_{\text{i àáë}} = \frac{(m/n - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \frac{(100/1000 - 0,08)\sqrt{1000}}{\sqrt{0,08 \cdot 0,92}} \approx 2,33.$$

Найдем критическую точку правосторонней критической области из равенства:

$\Phi(u_{\text{êð}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2} = \dfrac{1-0,1}{2} = 0,45$, откуда $u_{кр} = 1,645$.

Так как $U_{набл} > u_{кр}$, то следует отвергнуть нулевую гипотезу. Новая форма рекламы значимо эффективнее прежней.

**Пример 6.** Обычно применяемое лекарство снимает послеоперационные боли у 80% пациентов. Новое лекарство, применяемое для тех же целей, помогло 90 пациентам из первых 100 оперированных. Можно ли на уровне значимости a = 0,05 считать, что новое лекарство лучше? А на уровне a = 0,01?

Здесь нулевая гипотеза состоит в том, что новое лекарство действует как и прежнее (излечивает боли в 80% случаев):

$$H_0: \ p = 0,8.$$

Альтернативная гипотеза - $H_1$ является левосторонней — действие лекарства более сильное:

$$H_1: \ p > 0,8.$$

Уровень значимости и объем выборки даны в условии: $\alpha_1 = 0,05;\ \alpha_2 = 0,01,\ n=100.$

Если при проверке фиксируется число пациентов $K$, которым лекарство помогло, то эта величина может принимать значения из множества

$$\Omega = \{0,\ 1, \ldots,\ 100\}.$$

В случае истинности гипотезы $H_0$ величина $K$ является биномиальной случайной величиной $Bi(100;\ 0,8)$. Следовательно,

$$K \approx N\left(100 \cdot 0,8;\ \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}\right) \approx N(80;\ 4)$$

Пусть $\alpha_1 = 0,05$. Найдем границу критической области по формуле:

$$Z_{1-2\alpha} = Z_{0.9} = 1,645,$$

$$x_{\text{ï ðàä}} = 80 + 4 \cdot 1,645 = 86,58$$

Таким образом, критическая область может быть записана в виде

$$S = \{87, \ldots,\ 100\}.$$

Область принятия нулевой гипотезы соответственно такова:

$$\{0,\ 1, \ldots,\ 86\}.$$

Так как новое лекарство помогло 90 пациентам из первых 100 оперированных, то следует отвергнуть нулевую гипотезу.

Пусть $\alpha_2 = 0,01$. Найдем границу критической области по формуле:

$$Z_{1-2\alpha} = Z_{0.98} = 2,33,$$

$$x_{\text{ï ðàä}} = 80 + 4 \cdot 2,33 = 89,32$$

Таким образом, критическая область может быть записана в виде

$$S = \{90, \ldots,\ 100\}.$$

Область принятия нулевой гипотезы соответственно такова:

$$\{0,\ 1, \ldots,\ 89\}.$$

## Гипотеза о равенстве средних

**Пример 7.** Ожидается, что добавление специальных веществ уменьшит жесткость воды. По оценке жесткости воды до после добавления специальных веществ по 40-ка и 50-ти пробам соответственно получим средние значения жесткости (в стандартных единицах), равные 4,0 и 0,8. Дисперсия измерений в обоих случаях предполагается равно 0,25. Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект? Принять α=0,05α=0,05. Контролируемая величина имеет нормальное распределение.

Введем нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$, Где $X, Y$ - жесткость воды до и после добавления реагента. Альтернативная гипотеза $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{4,0 - 0,8}{\sqrt{\frac{0,25}{40} + \frac{0,25}{50}}} \approx 30,17 .$$

По таблице функции Лапласа найдем критическую точку из условия

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,05}{2} = 0,475, \text{ откуда } z_{кр} = 1,96 .$$

Так как $|Z_{набл}| = 30,17 > 1,96 = z_{кр}$, то нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ следует отвергнуть.

Влияние реагента существенно, результаты подтверждают ожидаемый эффект

**Пример 8.** Производительность каждого из агрегатов А и В составила (в кг вещества за час работы)

| Номер замера | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Агрегат А | 14,1 | 13,1 | 14,7 | 13,7 | 14,0 |
| Агрегат В | 14,0 | 14,5 | 13,7 | 12,7 | 14,1 |

Можно ли считать производительность агрегатов А и В одинаковой в предложении, что обе выборки получены из нормально распределенных генеральных совокупностей, при уровне значимости a = 0,1?

Обозначим первую выборку (агрегат А) $X$, вторую выборку (агрегат В) $Y$. Найдем выборочные числовые характеристики выборок.

| | | | | | | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 14,1 | 13,1 | 14,7 | 13,7 | 14 | **69,6** |
| $(x_i - \overline{x})^2$ | 0,0324 | 0,6724 | 0,6084 | 0,0484 | 0,0064 | **1,368** |

Выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{69,6}{5} = 13,92$.

Выборочная исправленная дисперсия $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1,368}{4} = 0,342$.

| | | | | | | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 14 | 14,5 | 13,7 | 12,7 | 14,1 | **69** |
| $(y_i - \overline{y})^2$ | 0,04 | 0,49 | 0,01 | 1,21 | 0,09 | **1,84** |

Выборочное среднее $\overline{y} = \frac{1}{m}\sum y_i = \frac{69}{5} = 13,8$.

Выборочная исправлена дисперсия $s_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum (y_i - \overline{y})^2 = \frac{1,84}{4} = 0,46$.

Исправленные дисперсии различны, поэтому проверим гипотезу о равенстве дисперсий, используя критерий Фишера-Снедекора. Найдем отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F_{набл} = \frac{0,46}{0,342} \approx 1,345 .$$

В качестве конкурирующей гипотезы примем гипотезу $H_1 : D(X) \neq D(Y)$. По таблице при уровне значимости $\alpha/2 = 0,1/2 = 0,05$ и числам степеней свободы $k_1 = m-1 = 4$ и $k_2 = n-1 = 4$ найдем критическую точку $F_{кр}(0,05, 4, 4) = 6,39$. Так как $F_{набл} = 1,345 < 6,39 = F_{кр}$, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Итак, предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, поэтому сравним средние.

Введем нулевую гипотезу: $H_0 : M(X) = M(Y)$. Вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле:

$$T_{набл} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m \cdot (n+m-2)}{n+m}} .$$

Получаем:

$$T_{набл} = \frac{13,92 - 13,8}{\sqrt{4 \cdot 0,342 + 4 \cdot 0,46}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5 \cdot 8}{10}} \approx 0,3 .$$

Находим критическую точку (двусторонняя область) из таблицы Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,1$ и числу степеней свободы $k = m+n-2 = 8$ $t_{дв.кр} = 1,86$. Так как наблюдаемое значение критерия 0,3 меньше критического, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, то есть можно сказать, что производительность агрегатов А и В одинакова.

## Гипотеза о равенстве дисперсий

**Пример 9.** До наладки станка была проверена точность изготовления 10 втулок и найдено значение оценки дисперсии диаметра s21=9,6s12=9,6 мкм22. После наладки подверглись контролю еще 15 втулок и получено новое значение оценки дисперсии s22=5,7s22=5,7 мкм22. Можно ли считать, что в результате наладки станка точность изготовления деталей увеличилась? Принять α=0,05α=0,05.

Проверим нулевую гипотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий, при конкурирующей гипотезе $H_1 : D(X) > D(Y)$.

Используем критерий Фишера-Снедекора. Найдем отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F_{набл} = \frac{9,6}{5,7} = 1,68 .$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) > D(Y)$, потому критическая область – правосторонняя.

По таблице при уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 9$ (большая дисперсия) и $k_2 = n_2 - 1 = 14$ (меньшая дисперсия) найдем критическую точку $F_{кр}(0,05;9;14) = 2,64$ . Так как $F_{набл} = 1,68 < 2,64 = F_{кр}$ , нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, дисперсии различаются незначимо.

## Гипотеза о равенстве вероятностей

**Пример 11.** Из 200 задач первого раздела курса математики, предложенных для решения, абитуриенты решили 130, а из 300 задач второго раздела абитуриенты решили 120. Можно ли при α=0,01 утверждать, что первый раздел школьного курса абитуриенты усвоили лучше, чем второй.

РЕШЕНИЕ. Пусть $p_1$ - процент абитуриентов, решающих задачи первого раздела, $p_2$ - процент абитуриентов, решающих задачи второго раздела. Введем нулевую гипотезу $H_0 : p_1 = p_2$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : p_1 > p_2$. Вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле:

$$U_{набл.} = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$ , где $m_1 = 130,\ n_1 = 200,\ m_2 = 120,\ n_2 = 300$

Подставляем

$$U_{набл.} = \frac{\frac{130}{200} - \frac{120}{300}}{\sqrt{\frac{130+120}{200+300}\left(1-\frac{130+120}{200+300}\right)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{300}\right)}} \approx 5,48$$

Найдем критическую точку $U_{кр.}$ из условия $\Phi(U_{кр.}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-0,02}{2} = 0,49$, $U_{кр.} = 2,33$.

Так как $|U_{набл.}| = 5,48 > 2,33 = U_{кр.}$ , нулевую гипотезу следует отвергнуть на данном уровне значимости, можно считать, что первый раздел усвоен лучше.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

Задача 1. При уровне значимости α=0,1α=0,1 проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин X и Y на основе выборочных данных (табл. 4) при альтернативной гипотезе H1:σ2x≠σ2yH1:σx2≠σy2.

Задача 2. Выборочная проверка надежности материнских плат 2-х производителей дала следующие результаты: в течения месяца после продажи в 15 из 200 материнских плат производителя A обнаружены дефекты, тогда как среди 400 материнских плат производителя B 8% оказались дефектами. Существенны ли различия в надежности материнских плат производителей A и B? Уровень значимости принять равным 0,01.

Задача 3. В книге "Основы химии" Д.И. Менделеева приводятся данные о растворимости азотнокислого натрия в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных частей $NaNO_3$ (Y) при соответствующих температурах (X) раствора:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 4 | 10 | 15 | 21 | 29 | 36 | 51 | 68 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 66,7 | 71,0 | 76,3 | 80,6 | 85,7 | 92,9 | 99,4 | 113,6 | 125,1 |

Постройте корреляционное поле.

Предполагая, что зависимость между X и Y близка к линейной, найдите выборочный коэффициент парной корреляции и оцените достоверность выборочного значения коэффициента парной корреляции. Найдите уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Постройте линии регрессии. Используя соответствующие уравнения регрессии, найдите, при какой температуре раствориться 100 условных частей $NaNO_3$ и какова температура раствора $NaNO_3$, если растворилось 84 условных частей. Решить задачи:

№ 16-17 (Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений Баврин, И. И. - 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 602).

Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание.

Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-17 (с. 31).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

1. Статистическая гипотеза – это:

а) любое предположение, используемое в статистическом исследовании;

б) предположение, которое можно проверить с использованием имеющейся статистической информации;

в) научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо явления и требующее проверки на опыте.

2. Критерий – это:

а) отличительный признак, принимаемый за норму, мерило;

б) то, что удостоверяет объективную истинность познания;

в) набор правил, принимаемых для проверки статистической гипотезы.

3. Мощность критерия представляет собой:

а) объекты, вводимые в процесс производства;

б) способность критерия четко различать нулевую и альтернативную статистические гипотезы;

в) величина, которой определяется количество энергии, развиваемой двигателем.

4. Ошибка первого ряда – это:

а) принятие статистической гипотезы, когда она ошибочна;

б) отклонение статистической гипотезы, когда она правильна;

в) ошибка при установлении истинного значения признака;

г) ошибка при исчислении статистического показателя.

5. Ошибка второго ряда – это:

а) принятие статистической гипотезы, когда она ошибочна;

б) отклонение статистической гипотезы, когда она правильна;

в) ошибка при установлении истинного значения признака;

г) ошибка при исчислении статистического показателя.

6. Уровень значимости – это:

а) вероятность, с которой гарантируется надежность результата исчисления того или иного показателя;

б) величина количественного показателя или степень проявления качественного показателя;
в) вероятность, соответствующая отклонению верной гипотезы.

7. Критическая область значений – это:

а) максимальные значения признака;
б) минимальные значения признака;
в) область, попадание значения статистического критерия вкоторою, приводит к отклонению испытываемой статистической гипотезы.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. **Литература (см. приложение) (см. приложение)**:

**Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения учебной дисциплины (модуля)**

**Основная литература**

| № п/п | Наименование | Авто р (ы) | Год, место издания | Кол-во экземп ляров в биб-лиотеке |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **1.** | Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник для прикладного бакалавриата: рек. УМО, рек. Мин. образования и науки РФ | Гмурман, В. Е. | 12-е изд. - М. : Юрайт, 2016. - 479 с. | 10 |
| 2. | Основы высшей математики: учебник | Лобоцкая, Н. Л. | - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М. : Альянс, 2015. - 479 с. | 1144 |

**Дополнительная литература**

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения учебной дисциплины (модуля)**

1. https://www.medicinform.net/ (Медицинская информационная сеть)

2. https://www.studentlibrary.ru/ (Консультант студента)