ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Кафедра медицинской физики с курсом информатики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

к практическим занятиям

Дисциплина ***Математика и математические методы в биологии***

Специальность 06.05.01 — Биоинженерия и биоинформатика

Курс 1

Семестр I

Уфа

Рецензенты:

Главный научный сотрудник Института биохимии и генетики – обособленного структурного подразделения ФГБНУ Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, д.б.н., профессор — А.В. Чемерис.

Декан биологического факультета ФГБОУ ВО “Уфимский университет науки и технологий”, заведующий кафедрой биохимии и биотехнологии, д.б.н., профессор, почетный работник ВПО РФ, Заслуженный деятель наук РБ, награжден медалью “За вклад в реализацию государственной политики в области образования” — С.А. Башкатов.

Автор: доцент Войтик В.В..

Утверждена на заседании № 10 кафедры медицинской физики с курсом информатики, от «18» апреля 2023 г.

Тема:

1.Матрицы. Основные определения и понятия. Транспонирование и умножение матриц.

2. Определители 2–го и 3–го порядка. Свойства.
3. Система линейных уравнений. Метод Гаусса.
4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
5. Векторы. Операции над векторами. Системы координат. Координаты вектора.
6. Скалярное произведение. Векторное произведение. Смешанное произведение.
7. Прямые на плоскости.
8. Линии второго порядка.
9. Функции.
10. Теоремы о пределах функций.
11. Нахождение предела функции.
12. Задачи, приводящие к понятию производной. Производная функции.
13. Основные способы дифференцирования функций.
14. Экстремумы функций
15. Применение производных к решению прикладных задач.
16. Применение производной для исследования функции.
17. Дифференциал функции. Аналитический и геометрический смысл дифференциала.
18. Функции двух переменных. Частные производные, частные и полный дифференциалы функции двух переменных.
19. Формула Тейлора.
20. Неопределенный интеграл. Основные способы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, метод подстановки.
21. Метод интегрирования по частям.
22. Интегрирование дробных функций.
23. Интегрирование тригонометрических и простейших иррациональных функций.
24. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
25. Геометрические приложения определенного интеграла.

1.Тема занятия № 1 и её актуальность. Матрицы. Основные определения и понятия. Транспонирование и умножение матриц.

Основные понятия и методы линейной алгебры являются средствами решения задач физического, химического, биологического и иного характера, встречающихся как в процессе изучения профильных дисциплин, так и в дальнейшей профессиональной деятельности.

2. Учебные цели:

- приобретение базовых знаний в области фундаментального раздела математики – линейной алгебры.
- изучение понятия матрицы, еѐ видов, операции над матрицами.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- понятия матрицы и основных операций над нею.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- научиться вычислять транспонированную матрицу, умножать матрицы друг на друга и на число, складывать матрицы;

и овладеть способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. Запишите матрицу А в общем виде размером 3×4
2. Какая матрица называется матрицей-строкой? Приведите пример.
3. Какая матрица называется матрицей-столбцом? Приведите пример.
4. Какая матрица называется квадратной? Придумайте и запишите квадратную матрицу четвертого порядка.
5. Запишите диагональные элементы матрицы из предыдущего примера.
6. Какая матрица называется диагональной? Придумайте и запишите диагональную матрицу третьего порядка.
7. Приведите пример единичной матрицы. Укажите ее размер.
8. Для какого вида матриц применимо понятие "треугольная матрица"?
9. Какая матрица называется нулевой? Приведите пример.
10. Какие матрицы называются равными? Приведите пример.
11. Сформулируйте определение суммы матриц.
12. Сложите матрицы А и В.
14. Сформулируйте правило умножения матрицы на число.
15. Какая матрица называется противоположной к матрице А?

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

Задания для самоконтроля: решение студентами индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Упорядоченная совокупность элементов, у которых номер строки и номер столбца совпадают называется:

а) побочной диагональю матрицы; б) ненулевой матрицей; в) главной диагональю матрицы; г) диагональной матрицей 2. Когда существует обратная матрица A^{-1}?

а) когда исходная матрица А квадратная; б) когда исходная матрица А невырожденная; в) когда исходная матрица А вырожденная; г) когда определитель исходной матрицы А равен 0.

3. Рангом матрицы называется

а) наибольший порядок нулевых миноров; б) произведение числа строк на число столбцов матрицы; в) число строк матрицы; **г)** наибольший порядок отличных от нуля миноров.

4. Такое свойство операций над матрицами как ассоциативность относительно сложения, можно записать в виде:

а) (A+B)+C=A+(B+C); б) A+B=B+A; в) α(A+B)=αA+αA; г) (α+β)A=αA+βA.

5. При умножении матрицы А на матрицу В должно соблюдаться условие

а) число столбцов матрицы А должно равняться числу строк матрицы В; б) число столбцов матрицы А равно числу столбцов матрицы В; в) число строк матрицы А равно числу строк матрицы В; г) число строк матрицы А равно числу столбцов матрицы В.

6. Что не относится к элементарным преобразованиям матрицы?

а) перестановка любых двух строк матрицы; б) умножение любой строки на производное, отличное от 0 число; в) сложение любой строки с другой строкой, умноженной на произвольное число, отличное от нуля; г) замена элементов строки (столбца) произвольными числами

7. Произведение матрицы А размерностью 3х4 на матрицу В существует, если размерность матрицы В равна а) 1х2; **б)** 4х2; в) 3х3; г) 2х3

8. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\3&4&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$. Тогда матрица C=A×B имеет вид

а) $\begin{pmatrix}11\\8\\27\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}11&8&24\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}11&9&27\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}11\\7\\24\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

10. Найти результат умножения матрицы A= $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ на число 5.

$\begin{pmatrix} 35 & 5 & 25 & 20 \\ -10 & 15 & 5 & 10 \\ 30 & 0 & -15 & 30 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -12 & 6 & 8 & 9 \\ -2 & 8 & 6 & 7 \\ 11 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 35 & -10 & 30 \\ 5 & 15 & 0 \\ 25 & 5 & -15 \\ 20 & 10 & 30 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 35 & 5 & 25 & 20 \\ 10 & 15 & 5 & 10 \\ 6 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

11. Если протранспонировать матрицу A= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, то A^T будет равняться:

$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

12. Для матрицы A= $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 & -13 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -20 & 14 & 10 & 6 \\ 1 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ указать сумму элементов, расположенных на побочной

9. Для матрицы существует обратная, если она равна а)

а) а) 1

диагонали.

а) -2; **б)** 2; в) 21; г) 0

1 2 1

13. Для матриц A= 0 1 3 и B= 1 23 найти элемент C_{12} произведения C=B×A.

2 0 1

<u>а)</u> 4; б) 7; в) 10; г) 21

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Матрица - это таблица данных, которая берется в круглые скобки:

4 1

-7

A =

-1 0 2

Матрица обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Матрица, содержащая n строк и m столбцов, называется матрицей размера n×m. При необходимости размер матрицы записывается следующим образом: $\mathbf{A_{n\times m}}$.

Элементы матрицы **A** обозначаются a_{ij}, где i - номер строки, в которой находится элемент, j - номер столбца.

Строка матрицы называется **нулевой**, если все ее элементы равны нулю.

Если хотя бы один из элементов строки матрицы не равен нулю, то строка называется **ненулевой**.

Столбец матрицы называется **нулевым**, если все его элементы равны нулю.

Если хотя бы один из элементов столбца матрицы не равен нулю, то столбец называется **ненулевым**. **Главной диагональю матрицы** называется диагональ, проведѐнная из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол.

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, проведѐнная из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Следом матрицы называется сумма диагональных элементов матрицы. **След матрицы** обозначается tr**A** = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.

Транспонирование матрицы - это операция над матрицей, при которой ее строки и столбцы меняются местами:

aTij = aji

Свойства транспонированной матрицы

- Если матрица A имеет размер n×m, то транспонированная матрица A^T имеет размер m×n; $(A^T)^T = A$;
- $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Произведением матрицы A на число k называется матрица B = k · A того же размера, полученная из исходной умножением на заданное число всех ее элементов: bi,j = k · ai,j

Свойства умножения матрицы на число

- 1 · A = A
- 0 · A = Θ, где Θ - <u>нулевая матрица</u>
- k · (A + B) = k · A + k
- · B (k + n) · A = k · A

$+ n \cdot A$ $(k \cdot n) \cdot A = k \cdot (n$
$\cdot A)$

Складывать и вычитать можно матрицы одного размера в результате получается матрица того же размера. **Сложение матриц** (**сумма матриц**) **A + B** есть операция вычисления матрицы **C**, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц **A** и **B**, то есть каждый элемент матрицы **C** равен:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Вычитание матриц (**разность матриц**) **A - B** есть операция вычисления матрицы **C**, все элементы которой равны попарной разности всех соответствующих элементов матриц **A** и **B**, то есть каждый элемент матрицы **C** равен:

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Свойства сложения и вычитания матриц

- Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \Theta = \Theta + A = A$, где Θ - нулевая матрица
- $A - A = \Theta$
- Коммутативность: $A + B = B + A$

Результатом **умножения матриц** $\mathbf{A}_{m\times n}$ и $\mathbf{B}_{n\times k}$ будет матрица $\mathbf{C}_{m\times k}$ такая, что элемент матрицы **C**, стоящий в i-той строке и j-том столбце (c_{ij}), равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы **A** на соответствующие элементы j-того столбца матрицы **B**:

$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj}$

Две матрицы можно перемножить между собой тогда и только тогда, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

Свойства умножения матриц

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - произведение матриц ассоциативно;
- $(z \cdot A) \cdot B = z \cdot (A \cdot B)$, где z - число;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ - произведение матриц дистрибутивно;
- $E_n \cdot A_{nm} = A_{nm} \cdot E_m = A_{nm}$ - умножение на единичную матрицу;
- $A \cdot B \neq B \cdot A$ - в общем случае произведение матриц не коммутативно.

Произведением двух матриц есть матрица, у которой столько строк, сколько их у левого сомножителя, и столько столбцов, сколько их у правого сомножителя.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Примеры задач на транспонирование матриц *Пример 1.*

Найти транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{matrix}.$$

Решение:

4 9

A
т =   2
0

Пример 2

Найти транспонированную матрицу A^T для матрицы

2   1
-3   0
A =   .
4   -1

Решение:

2   -3
4 A^T =
1   0   -1

Пример 3

Найти транспонированную матрицу A^T для матрицы

2   -3   4
A = .   1   0
-1

Решение:

2   1
т = -3   0
A
4   -1

Примеры задач на умножение матрицы на число *Пример 1.*

Найти произведение матрицы A = $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ и числа 5.

Решение:

5   4   5 2   20   10
5A= 5 9   5 0 = 45   0

Пример 2

Найти произведение матрицы A = 2-2-105-1 и числа (-2).

Решение:

(-2)·A = (-2)·2-2-105-1 = (-2)·2(-2)·(-2)(-2)·(-1)(-2)·0(-2)·5(-2)·(-1) = -4420-102

Примеры задач на сложение и вычитание матриц

Пример 1. Найти сумму матриц A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

A + B =

Пример 2. Найти разность матриц A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

A - B = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$

Пример 2. Найти матрицу C равную произведению матриц A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение:

C = A · B = $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 19 \\ -15 & 3 & -18 \\ 23 & -4 & 17 \end{pmatrix}$

Элементы матрицы C вычисляются следующим образом:

$c_{11} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} = 2\cdot 5 + 1\cdot(-3) = 10 - 3 = 7$
$c_{12} = a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 = -2 + 0 = -2$
$c_{13} = a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} = 2\cdot 6 + 1\cdot 7 = 12 + 7 = 19$
$c_{21} = a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} = (-3)\cdot 5 + 0\cdot(-3) = -15 + 0 = -15$
$c_{22} = a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} = (-3)\cdot(-1) + 0\cdot 0 = 3 + 0 = 3$
$c_{23} = a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23} = (-3)\cdot 6 + 0\cdot 7 = -18 + 0 = -18$
$c_{31} = a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} = 4\cdot 5 + (-1)\cdot(-3) = 20 + 3 = 23$
$c_{32} = a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} = (4)\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 = -4 + 0 = -4$
$c_{33} = a_{31}\cdot b_{13} + a_{32}\cdot b_{23} = 4\cdot 6 + (-1)\cdot 7 = 24 - 7 = 17$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

140

1. Задание. Чему равен элемент a_{23} матрицы A $= \begin{pmatrix} - & \\ - & \end{pmatrix}$

137

2. Пусть A= $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу 2A.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Вычислить AB и BA, если A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

T $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Найти A+B, если A=

4. Найти матрицу C=A−3B, если A= 2

6.Найти матрицу A , если A=

Решить задачи:

№ 26-28 (Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин, И. И. - 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 83).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.
1. Матрицей называется
1) прямоугольная таблица 2) определитель, составленный из элементов, распложенных в виде таблицы 3) выражение с девятью элементами 4) совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащих n-строк и m-столбцов
2. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется
1) диагональной 2) единичной 3) квадратной 4) нулевой
3. Произведение матриц существует только тогда, когда
1) количество элементов первой матрицы совпадают с количеством элементов другой матрицы 2) когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы 3) когда число строк первой матрицы равно числу строк второй матрицы 4) когда число столбцов двух матриц совпадают
4. Транспонированная матрица, это такая матрица, в которой
1) все элементы меняют на элементы с противоположным знаком 2) меняют местами элементы на главной диагонали и побочной диагонали 3) меняют местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования 4) есть строка (столбец) из одинаковых элементов 5. Что указывает первый индекс элемента матрицы?
1) номер столбца элемента 2) номер строки элемента 3) количество строк в матрице 4) количество столбцов в матрице
6. Главная диагональ в матрице:
1) слева сверху-вправо вниз 2) слева снизу - вправо вверх 3) имеет наибольшую сумму элементов 4) не должна содержать нулей
7. Побочная диагональ в матрице:
1) слева сверху-вправо вниз 2) справа сверху-влево вниз 3) имеет наибольшую сумму элементов 4) не должна содержать нулей

8. Произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ равно

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$; 2) $-1 \quad 8 \quad -3$; 3) $\begin{pmatrix} 11 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 1 \\ 20 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;4) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

9. Сумма матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ равна

1)

$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

10. Для матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ транспонированной является

1)

$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1.Тема занятия № 2 и еѐ актуальность. Определители 2–го и 3–го порядка. Свойства.

Формирование понятия определителя исторически связано с задачами решения больших систем линейных уравнений. Значение определителя состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с его помощью можно найти решение линейных систем. Определители имеют широкое применение в физике.

2. Учебные цели:

- приобретение базовых знаний в области фундаментального раздела математики – линейной алгебры.
- овладение навыками работы с матрицей и еѐ определителем.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- понятия матрицы и основных операций над нею.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- научиться вычислять определитель матрицы, находить матрицу обратную к данной, решать систему линейных уравнений матричным способом и методом Крамера;

и овладеть способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

i j

1) Что такое определитель матрицы? Как связана обратимость матрицы с еѐ определителем?
2) Опишите методы отыскания ранга матрицы.
3) Сформулируйте теорему о разложении определителя по строке (столбцу).
4) Перечислите основные свойства определителя.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

Задания для самоконтроля: решение студентами индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k.
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.
7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{i\,j} = b_j + c_j$ (j=1,…n), то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i-ой, - такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.
8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Минором $M_{i\,j}$ элемента $a_{i\,j}$ определителя d n-го порядка называется определитель порядка n-1, который получается из d вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента $a_{i\,j}$ определителя d называется его минор $M_{i\,j}$, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a будем обозначать $A_{i\,j}$. Таким образом, $A_{i\,j} = (-1)^{i+j} M_{i\,j}$.

i j

Способы практического вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков, дает следующая теорема.

Теорема (разложение определителя по строке или столбцу).

Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеет место разложение d по элементам i-й строки d = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} +... + a_{in} A_{in} (i =1,…n) или j-го столбца d = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} +... + a_{nj} A_{nj} (j =1,..n).
В частности, если все элементы строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.
Формула вычисления определителя третьего порядка, который вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

,7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5}$.

Пример 2. Вычислите определитель D = $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Получим нули во второй строке. Для этого второй столбец 1) умножим на (-2) и прибавим к первому столбцу; 2) прибавим к третьему столбцу; 3) умножим на (-4) и прибавим к четвѐртому столбцу.

Получим, что D= $\begin{vmatrix} 11 & -4 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ -5 & 4 & 6 & -13 \end{vmatrix}$. Разложим полученный определитель по элементам второй строки. При этом произведения всех элементов этой строки на их алгебраические дополнения, кроме элемента 1, равны нулю. Для того, чтобы получить алгебраическое дополнение для элемента 1, нужно вычеркнуть те строку и столбец, где этот элемент стоит, т. е. вторую строку и второй столбец. Знак алгебраического дополнения

определяет (-1)2+2 = (-1)4 = +1. Итак, D = + $\begin{vmatrix} 11 & 1 & 18 \\ 1 & 4 & -2 \\ -5 & 6 & -13 \end{vmatrix}$. Получили определитель 3-го порядка. Этот определитель можно вычислить, используя диагонали и треугольники, но можно свести к определителю второго порядка. Умножим первый столбец 1) на (-4) и прибавим ко второму столбцу, 2) умножим его на 2 и прибавим к третьему столбцу. Получим, что

D = $\begin{vmatrix} 11 & -43 & 40 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 26 & -23 \end{vmatrix}$. Следовательно, D = $(-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} -43 & 40 \\ 26 & -23 \end{vmatrix}$. Используя свойство 70, прибавим к первому столбцу второй, получим D = - $\begin{vmatrix} -3 & 40 \\ 3 & -23 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 40 \\ 1 & -23 \end{vmatrix}$ = -3×(23 – 40) = 51.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Решить задачи:

№ 29-38 (Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин И. И. - 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 83-85).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

1. Определитель – это:

а) матрица; б) число; в) вектор; г) прямоугольная таблица чисел; д) неопределяемое понятие.

2. Матрица – это

а) прямоугольная таблица чисел; б) неопределяемое понятие; в) отличный от нуля минор; г) диагональная таблица чисел; д) определитель.

3. Определитель |2| равен:

а) 0; б) 1; в) 2; г) бесконечности; д) 10.

4. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен:

а) 0; б) 8; в) –8; г) 16; д) бесконечности.

5. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ равен:

а) $3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; б) 6; в) 9; г) 0; д) не существует; е) +∞; ж) 2π

6. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен:

а) 0; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) 8; г) 2; д) $1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

7. Элемент a_{12} матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ равен

а) 5; б) 8; в) 4; г) –1; д) бесконечности.

8. Минор матрицы

а) 2; б) 4; в) 36; г) 0; д) 24.

9. Алгебраическое дополнение A_{32} матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ & & \end{pmatrix}$

$$0 \quad 1 \quad 2$$

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1\,4 \\ 0\,2 \\ 0\,1 \end{pmatrix}$; в) $-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$; г) –7; д) 0.

10. Матрицу $\begin{pmatrix} 1\,8\,2 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$ можно умножить на матрицу

а) $\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 1\,4\,2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $1 \quad 3$; д) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ равен

а) 99; б) 3; в) 2; г) 0; д) ∞; е) не существует.

Правильные ответы: 1. б). 2. а). 3. в). 4. в). 5. а),б). 6. а),б),д). 7. в). 8. в). 9. в),г). 10. б). 11. в).

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература: № 29-38 (Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 68-74).

1. **Тема занятия № 3 и еѐ актуальность.** Система линейных уравнений. Метод Гаусса.

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Метод Гаусса - один из основных результатов линейной алгебры и аналитической геометрии, к нему сводятся множество других теорем и методов линейной алгебры (теория и вычисление определителей, решение систем линейных уравнений, вычисление ранга матрицы и обратной матрицы, теория базисов конечномерных векторных пространств и т.д.). Таким образом, задача поиска решений системы линейных уравнений методом Гаусса имеет не только самостоятельное значение, но часто является составной частью алгоритма решения многих нелинейных задач.

2. **Учебные цели:** рассмотреть метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- элементарные преобразования над матрицами;
- этапы решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

и овладеть способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

3. **Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1) Что такое система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и ее решение?
2) Что значит решить систему линейных уравнений?
3) Сколько решений может иметь СЛАУ?
4) В чем суть метода Гаусса? Что такое элементарные преобразования строк матрицы?
5) Какая система называется ступенчатой?
6) Сформулируйте алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса. 7) Какие переменные в методе Гаусса называются главными неизвестными и свободными неизвестными? В каком случае они появляются?
8) Приведите примеры систем линейных уравнений, которые имеют одно решение, бесконечно много и не имеют решения.

9) Сформулируйте критерий совместности системы линейных уравнений.

10) Укажите способ исследования системы линейных уравнений на совместность.

11) Какое решение называется базисным?

4. Вид занятия: практическое занятие

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

1. Какое из уравнений не является линейным?

а) $4x1 = 5x2\ \ 7$; б) $2x1\ \ 3x2 + 5\ \ 0$; в) $x1\ \ 2x\ x23\ \ 3x4\ \ \ 0$; г) $6x = 24$

2. Если система уравнений равносильна данной, то

а) из неѐ можно исключить любое уравнение без потери смысла; б) системы имеют одинаковые решения; в) к ней можно добавить любое уравнение без потери смысла; г) система не имеет решений.

3. Какое из высказываний не относится к методу сложения?

а) уравнения системы почленно складывают; б) одно или несколько уравнений могут быть умножены на различные числа; в) к коэффициентам при переменных могут быть прибавлены любые числа; г) в результате одно из уравнений содержит лишь одну переменную.

4. Какое из решений является решением системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x + 8y = 1 \end{cases}$?

а) (3; 2); б) (5; 2); в) (-5; 0); г) (-5; 2).

5. Если определитель системы равен нулю, а определители при неизвестных не равны нулю, то

а) Система имеет решение, отличные от нуля; б) Система имеет любое единственное решение; в) Система не имеет решений; г) Система имеет бесконечное множество решений.

6. Если в системе линейных уравнений в одном или нескольких уравнениях отсутствуют какие-либо переменные, то

а) Система не имеет решений; б) Соответствующие им элементы в определителе равны нулю; в) Система имеет решения, в которых эти переменные равны нулю; г) Ни один из перечисленных ответов не является правильным.

7. При решении систем уравнений методом Гаусса нельзя:

а) удалять равные или пропорциональные строки кроме одной; б) любую строку умножать или делить на некоторое число; в) переставлять местами строки; г) умножать любой столбец на некоторое число.

8. К «обратному ходу метода Гаусса» относится следующее

а) Ко второй строке прибавляется первая, умноженная на некоторое число; б) Из последнего уравнения определяется самое правое неизвестное; в) Составляется матрица свободных членов; г) «Лишние» уравнения исключаются из системы.

9. Если при выполнении преобразований появились уравнения вида 0 $\cdot\ _1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$ x 0 , то неверно следующее:

а) Неизвестным, которые удовлетворяют этому уравнению, можно придать любые значения; б) Система не имеет решений; в) Число уравнений меньше числа неизвестных; г) Неопределённой является и исходная система.

10. Если все элементы матрицы свободных членов равны нулю, то

а) Система не имеет решений; б) Система обязательно имеет решения; в) Все неизвестные равны нулю; г) Ни один из вариантов не является правильным.

Правильные ответы: 1.в; 2.б; 3.в; 4.г; 5.в; 6.б; 7.г; 8.б; 9.б; 10.б

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Разберѐм систему $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ и решим ее методом Гаусса.

На первом этапе нужно записать *расширенную матрицу системы*:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$. По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно. Вертикальная черта внутри матрицы не несѐт никакого математического смысла.

Матрица системы – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном примере матрица системы: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Расширенная матрица системы – это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$. После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются элементарными преобразованиями.

<u>Существуют следующие элементарные преобразования:</u>

1) Строки матрицы можно переставлять местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую строки: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array}\right)$

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то

следует удалить из матрицы все эти строки кроме одной. Рассмотрим, например матрицу $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right)$. В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из них: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$.

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует удалить. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой *одни нули*.

4) Строку матрицы можно умножить (разделить) на любое $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{array}\right)$

матрицу $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$ число, <u>отличное от нуля</u>. Рассмотрим, например, . Здесь

целесообразно первую строку разделить на –3, а вторую строку – умножить на

2: . Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно прибавить другую строку, умноженную на число, отличное от нуля. Рассмотрим

нашу матрицу из практического

2: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$

примера:

2: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

2: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$.

Умножаем первую строку на – , и ко второй строке

прибавляем первую строку умноженную на – . Теперь первую

строку можно разделить «обратно» на –

. На практике пишут короче:

Еще раз: ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчѐтов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ * & * & * \end{array}\right)$»

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на –2: $1 \cdot (-2) = -2$, и ко второй строке прибавляю первую: 2 + (–2) = 0. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & * & * \end{array}\right)$

»

«Теперь второй столбец. Вверху –1 умножаю на –2: $-1 \cdot (-2) = 2$. Ко второй строке прибавляю первую: 1 + 2 = 3. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & * \end{array}\right)$ »

«И третий столбец. Вверху –5 умножаю на –2: $-5 \cdot (-2) = 10$. Ко второй строке прибавляю первую: –7 + 10 = 3. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$»

Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений!

Вернемся к системе $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$. Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к *ступенчатому виду*:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \overset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2.

(2) Делим вторую строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена *эквивалентная* исходной система уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ \quad y = 1 \end{cases}$$

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется *обратным ходом метода Гаусса*.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: $y = 1$.

Рассмотрим первое уравнение системы $x - y = -5$ и подставим в него уже известное значение «игрек»:

$x - 1 = -5$

$x = -4$

Ответ: $x = -4, y = 1$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

В результате мы придѐм в ходе решения к

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия? Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться единица. Вообще говоря, устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, – 18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \| & \| & \| & \| \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \| & \| & \| & \| \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Последнее выполненное действие – делим третью строку на 3. В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ y-z=1 \\ z=4 \end{cases}$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.
Типовые задачи.

А. Решить системы уравнений методом Гаусса:

1. $\begin{cases} 2x+3y+5z=10 \\ 3x+7y+4z=3 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x+5y+6z=7 \\ -x+6y+2z=2 \\ 5x-y+4z=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x-6y+4z=3 \\ 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -3x+5y+8z=-8 \\ 2x+4y+17z=5 \\ 5x-y+9z=13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-3y+2z=-4 \\ 6x-2y+3z=-1 \\ 5x-3y+2z=-3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -3x+2y-z=8 \\ -8x+4y+3z=-1 \\ -5x+2y+4z=-9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x+2y+3z=-2 \\ 2x-2y+5z=0 \\ 3x+4y+2z=-10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ x-2y+2z=-1 \\ 5x+y+z=4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x+3y-z=29 \\ 3x-6y+3z=-42 \\ -4x+2y-z=11 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x-2y-z=-4 \\ 3x+3y+5z=9 \\ -4x+5y+6z=13 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x+3y-2z=5 \\ x+4y-3z=2 \\ -2x+5y-z=-9 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 6x-2y-z=15 \\ x+4y-3z=-9 \\ 7x+2y-4z=6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x+9y+4z=-8 \\ x+4y+5z=5 \\ 2x+8y+z=-8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x+5y-z=3 \\ x+5y-3z=14 \\ 3x+10y-4z=17 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+5y-z=5 \\ x+y+2z=0 \\ -3x+4y+7z=-13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+5y-z=-12 \\ -2x+9y+2z=-14 \\ -3x+4y+3z=-2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -x+4y+3z=-5 \\ -2x-y+4z=2 \\ 2x+4y+3z=-1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x+5y-z=21 \\ x+y-2z=3 \\ 2x+3y+3z=15 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x+2y+3z=13 \\ -2x-y+4z=-4 \\ 2x+y-6z=2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x+3y-z=14 \\ -2x-y+4z=-3 \\ 2x+2y+3z=11 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ 5x-y-3z=1 \\ -2x+3y+6z=7 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-2y+4z=11 \\ 5x-y+3z=12 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-4y+3z=-7 \\ -2x-2y-z=-6 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x+11y+3z=40 \\ 3x+7y+4z=32 \\ -2x+4y-z=8 \end{cases}$

Решить задачи;
№ 46 (Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 85).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

1. Какая из пар чисел является решением линейного уравнения $4x - 3y = 27$? 1) 3; 5 ; 2) 3;5 ; 3) 3;5 ; 4) 3; 5

2. Для какого уравнения пара чисел 12; 5 является решением?

1) $4x - 5y = 60$; 2) $2x + 3y = 39$; 3) $2x - 8y = -18$; 4) $3x - 7y = 71$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x - 4y = 7. \end{cases}$

1) 3; − 0,5 ; 2) 3; 0,5 ; 3) 3;2 ; 4) −3; 0,5

4. Пусть $x_0; y_0$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 14, \\ 3x - 4y = -17. \end{cases}$

Найдите $x_0 + y_0$.

1) 3; 2) 13; 3) 2 ; 4) 1

5. Пусть $x_0; y_0$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x - 2y = 7, \\ 5x + 4y = 7. \end{cases}$ Найдите $x_0 y_0$.

1) −6 2) 6 3) −4 4) 8

6. Пусть $x_0; y_0$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x - y = 17, \\ 7x + 3y = 6. \end{cases}$

Найдите $\frac{x_0}{y_0}$. 1) −2 2) −0,2 3) −0,6 4) $-1\frac{2}{3}$

7. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 4x - y = 9, \\ -8x + 2y = -16? \end{cases}$

1) 1; 2) 2; 3) бесчисленное количество; 4) ни одного

8. Какая из пар чисел является решением линейного уравнения $3x - 2y = -1$?

1) 3; −5 ; 2) −3;5 ; 3) 3;5 ; 4) −3; 5

9. Для какого уравнения пара чисел −2;15 является решением?

1) $4x + 5y = -67$ 2) $-4x + 5y = 67$ 3) $4x - 5y = -67$ 4) $4x - 5y = 67$

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 2y = 7, \\ 3x - 4y = 1. \end{cases}$

1) 3; − 0,5 2) 3; 0,5 3) 3;2 4) −3; 0,5

11. Пусть $x_0; y_0$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} -2x + 3y = 16, \\ 3x - 4y = -22. \end{cases}$ Найдите $x_0 + y_0$

1) −3 2) 3 3) 2 4) 1

12. Пусть $x_0; y_0$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x - 2y = -13, \\ 5x + 4y = 33. \end{cases}$ Найдите $x_0 y_0$.

1) 6 2) 8 3) 8 4) 7

13. Пусть $x_0; y_0$ - решение системы $\begin{cases} 4x - y = 4, \\ 16x + 3y = 2. \end{cases}$ линейных уравнений Найдите x_0.

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 6x + 3y = -15? \end{cases}$$

y_0

1) $-0{,}5$ 2) $-0{,}25$ 3) $-0{,}4$ 4) $0{,}2$

14. Сколько решений имеет система уравнений

1) 1; 2) 2; 3) бесчисленное количество; 4) ни одного

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература: Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 76-78.

1. Тема занятия № 4 и еѐ актуальность. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Актуальность заключается в том, что системы линейных алгебраических уравнений – это математический аппарат, который имеет широкое применение в решении многих задач практического приложения математики.

2. Учебные цели: показать применение метода Крамера, и закрепить умения и навыки при решении систем линейных уравнений методом Крамера.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- элементарные преобразования над матрицами;
- этапы решения систем линейных уравнений методом Крамера. Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**
- решать системы линейных уравнений методом Крамера.

и овладеть способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. Что называется матрицей?
2. Какие бывают виды матриц?
3. Каковы основные действия над матрицами?
4. Какая матрица называется невырожденной?
5. Какая матрица называется обратной по отношению к данной матрице?
6. Сформулируйте правило нахождения обратной матрицы.

7. Что называется рангом матрицы?
8. Как найти ранг матрицы?
9. Что называется определителем второго, третьего, *n*-го порядков?
10. Перечислите основные свойства определителей.
11. Что называется минором, алгебраическим дополнением элемента определителя?
12. В чем заключается теорема Лапласа?
13. Дайте определение системы линейных алгебраических уравнений.
14. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
15. Напишите формулы Крамера решения системы линейных уравнений. В каких случаях их можно использовать?
16. Опишите матричный способ решения системы линейных уравнений.
17. Опишите схему решения системы линейных уравнений методом Гаусса.
18. Как найти решение системы линейных однородных уравнений?
19. Какова геометрическая интерпретация системы линейных уравнений и неравенств?
20. Любые ли системы можно решить методом Крамера и матричным методом?

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Теорема Крамера. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ

- определитель матрицы системы, Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Замечание

Если определитель системы равен нулю, то система может быть как совместной, так и несовместной.

Замечание

Данный метод удобно применять для маленьких систем с громоздкими вычислениями, а так же если нужно найти одну из неизвестных. Трудность заключается в том, что необходимо считать много определителей. Примеры решения систем уравнений Пример

Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Решение. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов. Будем иметь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 18 = -11$$

Аналогично, определитель Δ_2 получается из определителя матрицы системы Δ заменой второго столбца столбцом свободных коэффициентов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 14 = 31$$

Тогда получаем, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1} = 31$$

Ответ. $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Решим систему по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (-3-8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$$

, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-9+20) + 4 \cdot (-9-40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&21&4\\3&9&-2\\2&10&-1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}9&-2\\10&-1\end{vmatrix}-21\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\2&-1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3&9\\2&10\end{vmatrix}=$$
$$=3\cdot(-9+20)-21\cdot(-3+4)+4\cdot(30-18)=33-21+48=60$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{-60}=-1$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&-2&21\\3&4&9\\2&-1&10\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4&9\\-1&10\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2&21\\-1&10\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-2&21\\4&9\end{vmatrix}=$$
$$=3\cdot(40+9)-3\cdot(-20+21)+2\cdot(-18-84)=147-3-284=-60$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-60}{-60}=1$$

Ответ: $x_1=5, x_2=-1, x_3=1$.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Решить систему методом Крамера x 2y 1

3x 4y 7

2. Решить систему методом Крамера

$2x_1 + 3x_2 - 1 = 0$

$3x_1 - 4x_2 + 1 = 0$

3. Решить систему методом Крамера x1 x2 2x3 2 $2x_1$ $3x_2$ x_3 1 x1 4x2 x3 3

4. Решить систему методом Крамера

2x 3y z 4 x

y 3z 5

3x 4y z 0

5. Решить систему методом Крамера x 2x $_1$ $_2$ 4x $_3$ 31 5x x $_1$ $_2$ 2x $_3$ 29

3x x $_1$ $_2$ x_3 10

6. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

2x $_1$ 3x $_2$

x_3 1 3x $_1$ x $_2$

2x $_3$ 1 x $_1$

4 x_2 x $_3$ 2

7. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

x x $_1$ $_2$ x_3 2

2x x 6x $_1$ $_2$ $_3$ − 1

3x 2x $_1$ $_2$ 8

8. Решить систему линейных уравнений методом Крамера: 2x 3y z 3

5x 2y 3z 9

6x-5y-4z=3

Решить задачи

№ 47 (Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 85).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература: Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений Баврин И. И.-

5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., с. 78-80

1. Тема занятия № 5 и еѐ актуальность. Векторы. Операции над векторами. Системы координат. Координаты вектора.

Векторный и координатный методы решения задач – очень популярный и эффективный метод в геометрии и не только. Координатный метод решения задач на сегодняшний день самый мощный и при правильном подходе позволяет решить фактически все виды математических, физических, астрономических и технических задач. Кроме того, координатный метод в рамках школьной программы используется достаточно ограниченно и неполно. В этой связи тема векторов для обучающихся в высших образовательных учреждениях является актуальной.

2. Учебные цели:

- расширить и углубить знания обучающихся о методах и приемах решения стереометрических задач, сформировать у учащихся умения решать стереометрические задачи используя координатный метод. - формирование понятия вектора как направленного отрезка, умений применения вектора к решению простейших задач;
- обобщение изученного в базовой школе материала о векторах на плоскости, систематизация сведений о действиях с векторами в пространстве;
- формирование умений применять координатный и векторный методы к решению задач на нахождение углов между прямыми, прямыми и плоскостями, плоскостями в пространстве; на нахождение расстояний от точки до плоскости, между двумя прямыми, от точки до прямой;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- Понятие вектора. Действия над векторами. Угол между векторами. Координаты вектора. Длина вектора. Скалярное произведение векторов.
- Понятие базиса в пространстве. Векторы в пространстве. Разложение вектора по трѐм некомпланарным векторам.
- Матрица. Определители. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- Освоить определѐнный набор приѐмов векторного и координатного методов решения геометрических задач и уметь применять их при решении задач. и овладеть способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Какие величины называются скалярными, какие векторными?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие два вектора называются равными?
4. Как найти координаты векторов по координатам точек его начала и конца?
5. Каковы линейные операции над векторами?
6. Как найти проекцию вектора на ось?
7. Назовите правила сложения и вычитания векторов, заданных в координатной форме. Как умножить вектор на скаляр?

8. Что называется базисом (ортами) векторного пространства?
9. Напишите формулу разложения вектора по ортам.
10. Напишите формулу для определения длины (модуля) вектора.
11. Что называется направляющими косинусами вектора?
12. Напишите формулы для нахождения направляющих косинусов вектора.
13. Дайте определение скалярного произведения двух векторов.
14. Перечислите основные свойства скалярного произведения.
15. Как найти скалярное произведение двух векторов, заданных координатами?
16. Напишите формулу для определения угла между двумя векторами, заданными координатами.
17. Напишите формулу для определения проекции вектора на ось данного вектора.
18. Напишите условия коллинеарности и перпендикулярности двух векторов.
19. Дайте определение векторного произведения двух векторов.
20. Перечислите основные свойства векторного произведения двух векторов.
21. Как найти векторное произведение двух векторов, заданных координатами?
22. Напишите формулы для нахождения площади параллелограмма и треугольника.
23. Дайте определение смешанного произведения трех векторов.
24. Перечислите основные свойства смешанного произведения.
25. Как найти смешанное произведение трех векторов, заданных координатами?
26. Напишите формулы для нахождения объема параллелепипеда и тетраэдра.
27. Напишите условие компланарности трех векторов.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Понятие вектора

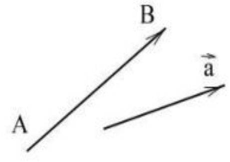


Рис. 1

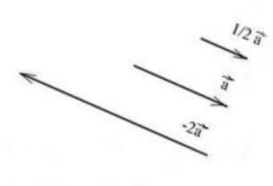
Геометрический вектор представлен в двумерном и трёхмерном пространстве в виде направленного отрезка. Это отрезок, у которого различают начало и конец.
Если A - начало вектора, B - его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или одной строчной буквой $\vec{a}$. На рисунке конец вектора указывается стрелкой (рис. 1)

Длиной (или модулем) геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$

Два вектора называются равными, если они могут быть совмещены (при совпадении направлений) путѐм параллельного переноса, т.е. если они параллельны, направлены в одну и ту же сторону и имеют равные длины.

В физике часто рассматриваются **закреплѐнные векторы**, заданные точкой приложения, длиной и направлением. Если точка приложения вектора не имеет значения, то его можно переносить, сохраняя длину и направление в любую точку пространства. В этом случае вектор называется **свободным**. Мы договоримся рассматривать только **свободные векторы**.

Рис. 2



Линейные операции над геометрическими векторами

Умножение вектора на число

Произведением вектора на число $\vec{a}$ называется λ вектор, получающийся из

$|\lambda| > 1$
$|\lambda| < 1$ $|\lambda|$

вектора $\vec{a}$ растяжением (при) или сжатием (при $\vec{a}$) в

$\lambda < 0$

раз, причѐм направление вектора сохраняется, если $\lambda > 0$, и меняется на

противоположное, если . (Рис. 2) Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\lambda\vec{a}$ = всегда расположены на

одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. (Можно говорить также, что эти векторы параллельны, однако в векторной алгебре принято говорить "коллинеарны".) Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ $\vec{b}$ и коллинеарны, то они связаны отношением

$\vec{b} = \lambda\vec{a}$. (1)

Следовательно, равенство (1) выражает условие коллинеарности двух векторов.

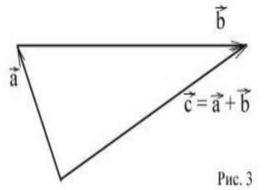


Рис. 3

Сложение и вычитание векторов

При сложении векторов нужно знать, что суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$

Рис. 4

. (Рис. 3)

Это определение может быть распределено на любое конечное число векторов. Пусть в пространстве

даны *n* свободных векторов $\vec a_1, \vec a_2, \dots, \vec a_n$. При сложении нескольких векторов за их сумму принимают замыкающий вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец - с концом последнего вектора. То есть, если к концу вектора $\vec a_1$ приложить начало вектора $\vec a_2$, а к концу вектора $\vec a_2$ - начало вектора $\vec a_3$ и т.д. и, наконец, к концу вектора $\vec a_{n-1}$ - начало вектора $\vec a_n$, то суммой этих векторов служит замыкающий вектор $\vec s = \vec a_1 + \vec a_2 + \dots + \vec a_n$, начало которого совпадает с началом первого вектора $\vec a_1$, а конец - с концом последнего вектора $\vec a_n$. (Рис. 4)

Слагаемые $\vec a_1, \vec a_2, \dots, \vec a_n$ называются составляющими вектора $\vec s$, а сформулированное правило правилом многоугольника. Этот многоугольник может и не быть плоским.

При умножении вектора $\vec a$ на число -1 получается противоположный вектор $-\vec a$.

Векторы $\vec a$ и $-\vec a$ имеют одинаковые длины и противоположные направления. Их сумма $\vec a + (-\vec a) = \vec 0$ даѐт нулевой вектор, длина которого равна нулю. Направление нулевого вектора не определено.

В векторной алгебре нет необходимости рассматривать отдельно операцию вычитания: вычесть из

вектора $\vec a$ вектор $\vec b$ означает прибавить к вектору $\vec a$ противоположный вектор $-\vec b$, т.е. $\vec a - \vec b = \vec a + (-\vec b)$

то есть, векторы можно складывать и умножать на числа так же, как и многочлены (в частности, также задачи на упрощение выражений). Обычно необходимость упрощать линейно подобные выражения с векторами возникает перед вычислением произведений векторов.

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\vec a - \vec b}{2}, \quad \overrightarrow{BC} = \frac{\vec a + \vec b}{2},$$
$$\overrightarrow{CD} = \frac{\vec b - \vec a}{2}, \quad \overrightarrow{DA} = -\frac{\vec a + \vec b}{2}.$$

Проекция вектора на ось

Проекция вектора на ось равна произведению длины проектируемого вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \vec a = |\vec a| \cos\varphi$$

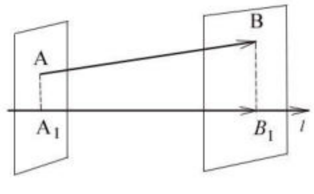


Рис. 5

Как известно, проекцией точки *A* на прямую (плоскость) служит основание A_1 перпендикуляра AA_1, опущенного из этой точки на прямую (плоскость).

Пусть $\overrightarrow{AB}$ - произвольный вектор (Рис. 5), а A_1 и B_1 - проекции его начала (точки *A*) и конца (точки *B*) на ось *l*. (Для построения проекции точки *A*) на прямую проводим через точку *A* плоскость, перпендикулярную прямой. Пересечение прямой и плоскости определит требуемую проекцию.

$\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}_l$

Составляющей вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ *на оси l* называется такой вектор $\overrightarrow{AB}$, лежащий на этой оси, начало которого совпадает с проекцией начала, а конец - с проекцией конца вектора .

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось *l* называется число

$$\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = \pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \pm\left|\vec{a}_l\right|$$

,

равное длине составляющего вектора на этой оси, взятое со знаком плюс, если направление составляюшей совпадает с направлением оси *l*, и со знаком минус, если эти направления противоположны. **Основные свойства проекций вектора на ось:**

1. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.
2. При умножении вектора на число его проекция умножается на это же число.
3. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций на эту же ось слагаемых векторов.
4. Проекция вектора на ось равна произведению длины проектируемого вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi$$

Связь вектора с прямоугольной декартовой системой координат в пространстве

В упорядоченной системе координатных осей *0xyz* ось *Ox* называется *осью абсцисс*, ось *0y – осью ординат*, и ось *0z – осью аппликат*.

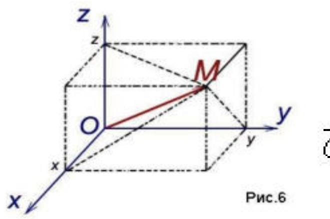


Рис.6

С произвольной точкой *M* пространства свяжем вектор $\overrightarrow{OM}$,

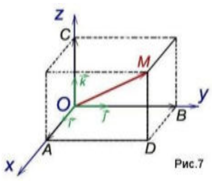
называемый *радиус-вектором* точки *M* и спроецируем его на каждую из координатных осей. Обозначим величины соответствующих проекций:

$$\text{пр}_x\overrightarrow{OM} = x,$$
$$\text{пр}_y\overrightarrow{OM} = y,$$
$$\text{пр}_z\overrightarrow{OM} = z.$$

Числа *x, y, z* называются *координатами точки M* , соответственно *абсциссой*,*ординатой* и *аппликатой*, и записываются в виде упорядоченной точки чисел: *M (x; y; z)* (рис.6).

Вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением оси, называют *единичным вектором*(или *ортом*) оси. Обозначим через

$\vec{i}$,
$\vec{j}$,
$\vec{k}$



Соответственно орты координатных осей Ox, Oy, Oz
$(|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1)$.

Теорема. Всякий вектор может быть разложен по ортам координатных осей:
$a = xi + yi + zk.$ (2)

Равенство (2) называется разложением вектора по координатным осям. Коэффициентами этого разложения являются проекции вектора на координатные оси. Таким образом, коэффициентами разложения (2) вектора по координатным осям являются координаты вектора.

После выбора в пространстве определѐнной системы координат вектор и тройка его координат однозначно определяют друг друга, поэтому вектор может быть записан в форме

$\vec{a} = (x; y; z).$ (3)

Представления вектора в виде (2) и (3) тождественны.

Условие коллинеарности векторов в координатах Как мы уже отмечали, векторы называются коллинеарными, если они связаны отношением
$\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Пусть даны векторы $\vec{a}\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right),\ \vec{b}\left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$. Эти векторы коллинеарны, если координаты
векторов связаны отношением

$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$,

то есть, координаты векторов пропорциональны. **Длина вектора и направляющие косинусы**

Вследствие взаимной перпендикулярности координатных осей длина вектора
$\overrightarrow{OM} = \vec{a} = (x; y; z)$
равна длине диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах
$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k},$
и выражается равенством
$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$ (4)

Вектор полностью определяется заданием двух точек (начала и конца), поэтому координаты вектора можно выразить через координаты этих точек.

Пусть в заданной системе координат начало вектора $\vec{a}$ находится в точке
$A(x_1; y_1; z_1)$,
а конец – в точке

$B(x_2; y_2; z_2)$.
(рис.8).

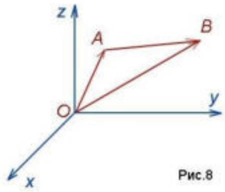


Рис.8

Тогда
$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{i} + z_1\vec{k},$$
$$\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{i} + z_2\vec{k}.$$
Из равенства
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$
следует, что
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$$
$$= \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right).$$
Отсюда
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$
или в координатной форме
$$\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \qquad (5)$$
Следовательно, ***координаты вектора равны разностям одноимѐнных координат конца и начала вектора***. Формула (4) в этом случае примет вид
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (6)$$
Направление вектора определяют ***направляющие косинусы***. Это косинусы углов, которые вектор образует с осями *Ox*, *Oy* и *Oz*. Обозначим эти углы соответственно α, βи γ. Тогда косинусы этих углов можно найти по формулам
$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{a}\right|}\ \cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{a}\right|}$$
Направляющие косинусы вектора являются также координатами орта этого вектора и, таким образом, орт вектора
$$\vec{a}^{\,0} = \left(\frac{x}{\left|\vec{a}\right|}, \frac{y}{\left|\vec{a}\right|}, \frac{z}{\left|\vec{a}\right|}\right)$$
или
$$\vec{a}^{\,0} = \left(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\right).$$
Учитывая, что длина орта вектора равна одной единице, то есть
$$\left|\vec{a}^{\,0}\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma},$$
получаем следующее равенство для направляющих косинусов:
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданные своими проекциями:

$a = x_1 i + y_1 j + z_1 k$

или

$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$,

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

или

$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

Укажем действия над этими векторами.

1.Сложение:

$$\vec{a}+\vec{b} = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j} + (z_1+z_2)\vec{k},$$

или, что то же

$$\vec{a}+\vec{b} = \left(x_1+x_2;\ \ y_1+y_2;\ \ z_1+z_2\right)$$

(при сложении двух векторов одноимѐнные координаты складываются).

2.Вычитание:

$$\vec{a}-\vec{b} = (x_1-x_2)\vec{i} + (y_1-y_2)\vec{j} + (z_1-z_2)\vec{k},$$

или, что то же

$$\vec{a}-\vec{b} = \left(x_1-x_2;\ \ y_1-y_2;\ \ z_1-z_2\right)$$

, (при вычитании двух векторов одноимѐнные координаты вычитаются).

3.Умножение вектора на число:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} + (\lambda z_1)\vec{k},$$

или, что то же

$$\lambda\vec{a} = \left(\lambda x_1;\ \ \lambda y_1;\ \ \lambda z_1\right),$$

(при умножении вектора на число все координаты умножаются на это число).

n-мерные векторы и операции над ними

При изучении многих вопросов, в частности, экономических, оказалось удобным обобщить рассмотренные приѐмы установления соответствия между числами и точками двумерного и трѐхмерного пространства и рассматривать последовательности n действительных чисел как "точки" некоторого абстрактного "nмерного пространства", а сами числа - как "координаты" этих точек. За составляющие n-мерного вектора можно принимать такие данные, как урожайность различных культур, объѐмы продаж товаров, технические коэффициенты, номенклатура товаров на складах и т.д. *n-мерным вектором* называется упорядоченный набор из n действительных чисел, записываемых в виде

$$x = (x_1; x_2; \ldots; x_n),$$

где x_n - i – й элемент (или i – я координата) вектора x.

Возможна и другая запись вектора – в виде столбца координат:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Например, (2; 5) – двухмерный вектор, (2; -3; 0) – трѐхмерный, (1; 3; -2; -4; 7) – пятимерный,

$(x_1; x_2; \dots; x_n)$ –

n – мерный вектор.

Нулевым вектором называется вектор, все координаты которого равны нулю:

0 = (0; 0; …; 0).

Введѐм операции над *n*-мерными векторами.

Произведением вектора

$x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$

на действительное число λ

$\lambda x = (\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n),$

называется вектор

(*при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число*).

Зная вектор

$x = (x_1; x_2; \dots; x_n),$

можно получить противоположный вектор

$-x = -1 \bullet x = (-x_1; -x_2; \dots; -x_n).$

Суммой векторов

$x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$

и

$y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$

называется вектор

$x + y = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n)$,

(*при сложении векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно складываются*).

$$y = \sum_{k=1}^{m} y^k = \left(\sum_{k=1}^{m} y_1^k; \sum_{k=1}^{m} y_2^k; \dots, \sum_{k=1}^{m} y_n^k \right).$$

Сумма противоположных векторов даѐт нулевой вектор:

$x + (-x) = (x_1; x_2 \dots; x_n) + (-x_1; -x_2; \dots; -x_n) =$

$= (0; 0; 0).$

При вычитании двух векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно вычитаются:

$x - y = (x_1 - y_1; x_2 - y_2; \dots; x_n - y_n).$

Операции над *n*-мерными векторами удовлетворяют следующим свойствам. Свойство 1.

$x + y = y + x.$

Свойство 2.
$(x+y)+z = x+(y+z)$.
Свойство 3.
$\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$.
Свойство 4.
$(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$.
Свойство 5.
$\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$.
Свойство 6.
$0x = \alpha 0 = 0$.
7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.
Пример 1. Упростить выражение:
$$2\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)+3\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)+4\vec{a}$$.

Решение:
$$2\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)+3\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)+4\vec{a} =$$
$$= 6\vec{a}-8\vec{b}+3\vec{b}-6\vec{a}+4\vec{a} =$$
$$= 4\vec{a}-5\vec{b}.$$

Пример 2 Векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ служат через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$

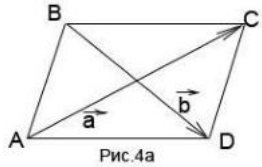


Рис.4а

диагоналями параллелограмма ABCD (рис. 4а). Выразить , являющиеся сторонами этого параллелограмма.

Решение. Точка пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую диагональ пополам. Длины требуемых в условии задачи векторов находим либо как половины сумм векторов, образующих с искомыми треугольник, либо как половины разностей (в зависимости от направления вектора, служащего диагональю), либо, как в последнем случае, половины суммы, взятой со знаком минус. Результат - требуемые в условии задачи векторы:
$$\text{пр}_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi$$

Пример 5. Рассчитать проекцию суммы векторов $\text{пр}_l\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$ на ось l,

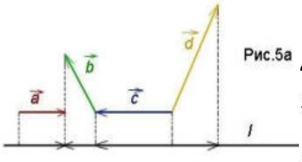


Рис.5а

если $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=4,\ \left|\vec{c}\right|=5,\ \left|\vec{d}\right|=8$, а углы -
$$\measuredangle\left(\vec{a},\ l\right)=0,\ \measuredangle\left(\vec{b},\ l\right)=\frac{2\pi}{3},$$
$$\measuredangle\left(\vec{c},\ l\right)=\pi,\ \measuredangle\left(\vec{d},\ l\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Решение. Спроектируем векторы на ось l как определено в теоретической справке выше. Из рис.5а очевидно, что проекция суммы векторов равна сумме проекций векторов. Вычисляем эти проекции:

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos 0 = 3\bullet 1 = 3$$

$$\text{пр}_l\vec{b} = |\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3} = 4\bullet\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$\text{пр}_l\vec{c} = |\vec{c}|\cos\pi = 5\bullet(-1) = -5$$

$$\text{пр}_l\vec{d} = |\vec{d}|\cos\frac{\pi}{3} = 8\bullet\frac{1}{2} = 4.$$

Находим окончательную проекцию суммы векторов:

$$\text{пр}_l\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right) = 3-2-5+4 = 0$$

Пример 6. Даны векторы $\vec{a}(3;\ -2;\ 4),\ \vec{b}(6;\ -4;\ 8)$. Коллинеарны ли эти векторы? Решение. Выясним соотношение координат данных векторов:

$$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \lambda.$$

Координаты векторов пропорциональны, следовательно, векторы коллинеарны, или, что то же самое, параллельны.

Пример 7. Найти длину вектора x = (3; 0; 4). Решение. Длина вектора равна

$$|x| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = 5.$$

Пример 8. Даны точки:

$$A(5;\ 7;\ 2),\ B(5;\ 4;\ 6),\ C(9;\ 4;\ 9)$$

Выяснить, равнобедренный ли треугольник, построенный на этих точках.

Решение. По формуле длины вектора (6) найдѐм длины сторон и установим, есть ли среди них две равные:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(5-5)^2+(4-7)^2+(6-2)^2} = 5,$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(9-5)^2+(4-4)^2+(9-6)^2} = 5.$$

Две равные стороны нашлись, следовательно необходимость искать длину третьей стороны отпадает, а заданный треугольник является равнобедренным.

Пример 9. Найти длину вектора $\vec{a}$ и его направляющие косинусы, если $\vec{a} = 5\vec{i}-6\vec{j}+2\sqrt{5}\vec{k}$.

Решение. Координаты вектора даны:

$$x = 5;\ y = -6;\ z = 2\sqrt{5}.$$

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов координат вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2+(-6)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Находим направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{5}{9};$$

$$\cos\beta = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3};$$

$$\cos\gamma = \frac{2\sqrt{5}}{9}.$$

Пример 11. Даны два вектора, заданные координатами:

$\vec{a}(1;\ 4;\ -2)$, $\vec{b}(2;\ 3;\ -4)$.

Найти заданный координатами вектор, являющийся суммой этих векторов: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Решение:

$$\vec{c} = (1+2;\ 4+3;\ -2-4;) = (3;\ 7;\ -6).$$

Пример 12. Даны четыре вектора:

$\vec{a}(3;\ 0;\ -2)$ $\vec{b}(1;\ 2;\ -5)$ $\vec{c}(-1;\ 1;\ 1)$ $\vec{d}(8;\ 4;\ 1)$,

Найти координаты векторов $\vec{e_1} = -5\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c} + \vec{d}$ и $\vec{e_2} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$.

Решение.

$$\vec{e_1} = (-5\bullet 3 + 1 - 6\bullet(-1) + 8;$$
$$-5\bullet 0 + 2 - 6\bullet 1 + 4;$$
$$-5\bullet(-2) - 5 - 6\bullet 1 + 1) =$$
$$= (0;\ \ 0;\ \ 0).$$

$$\vec{e_2} = (3\bullet 3 - 1 + 1 - 8;$$
$$3\bullet 0 - 2 - 1 - 4;$$
$$3\bullet(-2) + 5 - 1 - 1) =$$
$$= (1;\ -7;\ -3).$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

№	Задание	Варианты ответов
1	Даны векторы $\vec{a}(-1;2;0)$, $\vec{b}(3;1;1)$, $\vec{c}(2;0;1)$. Вычислить координату *x* вектора $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+\dfrac{\vec{c}}{3}$	1) $-17/3$; 2) $-19/3$; 3) $-15/3$; 4) $-18/3$; 5) правильный ответ не указан
2	На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$	1) $M(0;1;0)$; 2) $M(0;5;0)$; 3) $M(0;4;0)$; 4) $M(0;2;0)$; 5) правильный ответ не указан
3	Даны векторы $\vec{a}\,(2;3;0)$, $\vec{b}(0;-3;-2)$, $\vec{c}(1;1;-1)$. Вычислить координаты вектора $\vec{a}-(1/2)\vec{b}+\vec{c}$	1) $(3;10/2;0)$; 2) $(4;18/2;0)$; 3) $(3,5;15/2;0)$; 4) $(3;11/2;0)$; 5) правильный ответ не указан
4	Даны точки $A\,(3;-4;-1)$ и $B\,(-1;2;-3)$. Найти длину $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert$	1) $\sqrt{56}$; 2) $\sqrt{26}$; 3) 8; 4) 13; 5) правильный ответ не указан
5	Даны три вершины $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;\ 2;-3)$ параллелограмма. Вычислить координаты четвертой вершины *D*	1) $D(10;-5;4)$; 2) $D(9;-5;6)$; 3) $D(9;-5;3)$; 4) $D(10;-5;6)$; 5) правильный ответ не указан
6	Параллелограмм построен на векторах = $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$. Найти длину его диагоналей	1) $\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$; 2) 6; 3; 3) 3; $3\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{6}$; 5; 5) правильный ответ не указан
7	Даны вершины треуголь-ника $A(3;-1;\ 5)$, $B(4;\ 2;-5)$ и $C(-4;\ 2;\ 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины *A*	1) $\sqrt{13}$; 2) 6; 3) 3; 4) 7; 5) правильный ответ не указан
8	Дан вектор $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$. Найти его единичный вектор $\vec{a}_0$ того же направления	1) $\vec{a}_0=(1;2;5)$; 2) $\vec{a}_0=(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$; 3) $\vec{a}_0=(1;2;1)$; 4) $\vec{a}_0=(\frac{3}{2};\frac{-1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$; 5) правильный ответ не указан
9	Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$	1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$; 3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$; 4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$; 5) правильный ответ не указан
10	Даны векторы $\vec{a}\,(4;-2;-4)$, $\vec{b}(6;-3;2)$. Вычислить скалярное произведение $(2\vec{a}-3\vec{b})\,(\vec{a}+2\vec{b})$	1) -100; 2) -150; 3) -250; 4) -200; 5) правильный ответ не указан

Типовые задачи.

координатные оси и найти его длину.

2. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Найти: 1) $\overline{a}+\overline{b}$, 2) $\overline{a}-\overline{b}$, 3) $-\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$ 4) $2\overline{a}+\overline{b}$.

3. Построить векторы:
$\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}$; 2) $\overline{a}=7\overline{i}+5\overline{j}+4\overline{k}$.

4. Найти орт вектора $\overline{a}$, если $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{j}+5\overline{k}$. Построить вектор $\overline{a}$ и $\overline{a}^0$.

5. Разложить вектор $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}$ по векторам $\overline{b}=7\overline{i}-2\overline{j}$ и $\overline{c}=\overline{i}+3\overline{j}$ (аналитически и геометрически).

6. Разложить вектор $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}-4\overline{k}$ по векторам $\overline{b}=4\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{c}=3\overline{i}+7\overline{j}+5\overline{k}$.

Индивидуальная контрольная работа.

1: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам a и b ?

2: Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

3: Компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

4: При каком значении α векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны?

5: Даны координаты точек A,B,C. Вычислить:

1) пр $_{\vec{AB}+\vec{CB}}(2\vec{AC}+3\vec{CB})$ *; 2)* $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|$*; 3)* $\angle\ (\vec{AB}-\vec{CB}),\vec{AB}$ *; 4) орт вектора* $\vec{AB}$ *;*

$\vec{AB}+4\vec{BC}$, $\vec{BA}-\vec{AC}$ *; 6)* $\left[\ \vec{AB}+2\vec{BC}\ ,\ \vec{CB}-\vec{AB}\ \right]$*; 7)* $\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}$ *;*

1. Вектор a задан координатами своих концов A и B: A(2;1;-4), B(1;3;2). Найти проекции вектора a на

1)

5)

6: Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Вычислить: 1) объем пирамиды; 2) длину ребра AB ; 3) площадь грани ABC ;

Вариант 1

1.1 $\vec a = 1; 2;3$, $\vec b = 3;0; 1$, $\vec c_1 = 2a - 4b$, $c_2 = 3a - b$. 2.1 $\vec a = 1;3;1$, $\vec b = 3; 2;3$.

3.1 $\vec a = 2;3; 1$, $\vec b = 1; 1; 3$, $\vec c = 1; 9;1$.

4.1 A α ; 2;3 , B 0; 1;2 , C 3; 4;5 .

5.1 A 1;2;1 , B 1;3; 4 , C 0;1; 2 .

6.1 A 1; 1;1 , B 1;2; 4 , C 2;0; 6 , D 2;5;1 .

Вариант 2

1.2 $\vec a = 1;0;1$, $\vec b = 2;3;5$, $\vec c_1 = a + 2b$, $c_2 = 3a - 2b$

2.2 $\vec a = 2;1;4$, $\vec b = 4;1;3$.

3.2 $\vec a = 3; 2;1$, $\vec b = 2;1;1$, $\vec c = 3; 1; 2$.

4.2 A 0; 3; α , B 12; 3; 3 , C 9; 3; 6 .

5.2 A 0;1;2 , B 3; 1;2 , C 1;2;5 .

6.2 A 0;5;0 , B 2;3; 4 , C 0;0;6 , D 3;1; 1 .

Вариант 3

1.3 $\vec a = 2; 4;1$, $\vec b = 1;2; 7$, $\vec c_1 = 5a - 3b$, $c_2 = 2a - b$.

2.3 $\vec a = 0;1;2$, $\vec b = 1;3; 2$.

3.3 $\vec a = 2; 1;2$, $\vec b = 1;2; 3$, $\vec c = 3; 4;7$.

4.3 A 3; α ; 1 , B 5;5; 2 , C 4;1;1 .

5.3 A 0;2;3 , B 3;1;2 , C 1;5;1 .

6.3 A 0;0;6 , B 4;0; 4 , C 1;3; 1 , D 4; 1; 3 .

Вариант 4

1.4 $\vec a = 1;2; 3$, $\vec b = 2; 1; 1$, $\vec c_1 = 5a + 3b$, $c_2 = 8a - b$.

2.4 $\vec a = 1;2;1$, $\vec b = 3;1;2$.

3.4 $\vec a$ 1;2;4 , $\vec b$ 2;1; 5 , $\vec c = 1; 1; 1$.

4.4 A 1;2; α , B 3;4; 6 , C 1;1; 1 .

5.4 A 1;0;3 , B 1;4;1 , C 0;2;3 .

6.4 A 5;6; 1 , B 6; 5;2 , C 6;5;1 , D 0;0;2 .

Вариант 5

1.5 $\vec a = 3; 5;4$, $\vec b = 5;9; 7$, $\vec c_1 = 2a + 3b$, $c_2 = 3a - 2b$

2.5 $\vec a$ 2;1;7 , $\vec b$ 2;4; 3 .

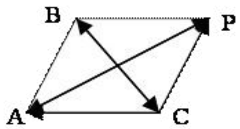
3.5 $\vec a = 2; 1;1$, $\vec b = 1;2;3$, $\vec c = 1; 3; 2$.

4.5 A 4; 2;0 , B α ; 2;4 , C 3; 2;1

5.5 A 1;1;0 ,B 4;1;2 ,C 1;2;3 .

6.5 A 2; 5;3 ,B 3;2; 5 ,C 5; 3; 2 ,D 5;3; 2

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий. 1. Какой вектор является суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ и ?



1) $\overline{BC}$ 2) $\overline{CB}$ 3) $\overline{AP}$ 4) $\overline{BP}$ 5) $\overline{CP}$

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой. **8. Литература**: указана в конце настоящих методических указаний.

1. **Тема занятия № 6 и еѐ актуальность**. Скалярное произведение. Векторное произведение. Смешанное произведение.

В настоящий момент было бы крайне трудно представить себе многие разделы современной физики – электродинамику, гидродинамику, теорию относительности, теорию упругости и т.д. – без векторного исчисления. Причиной тому является, безусловно, стремление более рационально организовать соответствующую область науки. В свою очередь это приводит к необходимости глубокого изучения векторного аппарата, как специфического и при этом универсального языка математики.

2. **Учебные цели**:

- научить находить векторное и смешанное произведение векторов и применять их в решении геометрических и физических задач.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- векторное и смешанное произведение векторов.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить векторное и смешанное произведение векторов;
- применять их в решении геометрических и физических задач.

и овладеть способность применять навыки работы с современной аппаратурой способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1) Векторное произведение. Свойства.
2) Векторное произведение векторов, заданных в прямоугольной системе координат. Нахождение площадей треугольника, параллелограмма, вычисления момента сил.
3) Смешанное произведение векторов. Свойства. Вычисление объемов параллелепипеда, призмы, пирамиды.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 час

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{a}$ $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$ 1. Какое из

2. Какое из выражений означает скалярное произведение векторов $\bar{m}$ $\bar{n}$?

$|\bar{m}\times\bar{n}|$ $np\,|\bar{m}+\bar{n}|$ 3) $(\bar{m},\bar{n})$ 4) $|\bar{m}||\bar{n}|$ 5) $|\bar{n}|$

3. По какой формуле вычисляется угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

$|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})$ 2) $|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})$ 3) $\arccos\dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

свойств векторного произведения верно?

1) 2)

1) 2)

$\arcsin\dfrac{(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ 1) $\cos\dfrac{(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

4) 5)

4. Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?
1) 0 2) 1 3) не существует

5. Выразить через единичные векторы $6\vec{i}-2\vec{j}$ $\vec{j}$ и
вектор $\overrightarrow{AB}$, если A(-2,-1),
B(4,-3)
$2\vec{i}-4\vec{j}$ 1) 2) $-6\vec{i}-4\vec{j}$ 3) $6\vec{i}-4\vec{j}$
$6\vec{i}-2\vec{j}$ 4) 5) $2\vec{i}+2\vec{j}$
$\vec{a}=(2,-3,1),\vec{b}=(3,0,-4)$

6. Найти скалярное произведение векторов
1) -4 2) 10 3) 6 4) 3 5) 2
$\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$
$-7\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ 7. Найти 2) 13 3) $-7\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ векторное
$2\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$ $-7\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$
произведение векторов

1)

4) 5)
$\vec{a}=(4,5,3)$
8. Найти длину вектора 2) $5\sqrt{2}$ 3) 7 4) $\sqrt{51}$ 5) $3\sqrt{5}$
$\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, если $\vec{a}=(2,3,4),\vec{b}=(-1,0,1),\vec{c}=(3,4,1)$
1) $3\sqrt{5}$
2) $\dfrac{25}{\sqrt{20}}$ 3) 5 4) $\dfrac{20}{\sqrt{26}}$ 5) $\dfrac{5}{\sqrt{26}}$
9. Найти проекцию вектора $\vec{c}=4\vec{a}-3\vec{b}$, если $\vec{a}=(1,3,0);\vec{b}=(-2,4,3)$

1) 4

10. Найти вектор
1) (-2,24,9) 2) 14 3) (10,0,-9) 4) 12 5) (2,12,0) 11. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}=(2,5,3);\vec{b}=(4,10,6)$?
1) Да; 2) Нет

12. Компланарны ли векторы $\vec{a}=(1,0,2),\vec{b}=(3,-1,4),\vec{c}=(1,-1,0)$?
1) Да; 2) Нет

13. Найти орт вектора $\vec{b}=(4,3,1)$
1) $\dfrac{4}{26}$; 2) $\dfrac{3}{26}$; 3) $\dfrac{1}{26}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{26}}$; 5) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{26}};\dfrac{3}{\sqrt{26}};\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right)$
$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$

14. Найти смешанное произведение векторов

1) 8 2) -4 3)0 4)10 5)-8

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Правильный ответ	2	3	3	1	4	5	1	2	4	3	1	1	5	3

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Скалярным произведением *векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.*

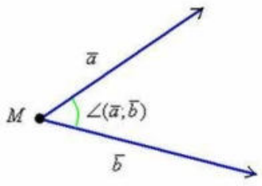


Рис. 1

Определение: Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ $\overline{b}$ и называется ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$$

(определение скалярного произведения через проекции). Формула (4.1) так же как и (4.2) часто используется при решении задач **Свойства скалярного произведения** и любого

Для произвольных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ числа λ справедливы следующие свойства:

$\overline{a}\overline{b}=\overline{b}\overline{a}$

$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}$

1)– переместительный или коммутативный закон скалярного произведения.

2) – распределительный или дистрибутивный закон скалярного произведения.

Попросту, можно раскрывать скобки.

3) $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\overline{b})$ – сочетательный или ассоциативный закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

Скалярное произведение в координатах

Скалярное произведение векторов $\overline{v}(v_1;v_2)$ и $\overline{w}(w_1;w_2)$, заданных в ортонормированном базисе $(\overline{i};\overline{j})$, выражается формулой $\overline{v}\cdot\overline{w}=v_1w_1+v_2w_2$

Скалярное произведение векторов $\overline{v}(v_1;v_2;v_3),\overline{w}(w_1;w_2;w_3)$, заданных в ортонормированном базисе $(\overline{i};\overline{j};\overline{k})$, выражается формулой $\overline{v}\cdot\overline{w}=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3$

То есть, скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат векторов.

Векторное произведение векторов

Определение: Векторным произведением $\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]$ неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\overline{N}$ $\overline{N}$ взятых в данном порядке, называется ВЕКТОР , длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного

на данных векторах; вектор ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и направлен так, что базис $(\overline{a};\overline{b};\overline{N})$ имеет правую ориентацию:

Свойства векторного произведения векторов

Некоторые свойства векторного произведения мы уже рассмотрели, тем не менее, я их включу в данный список.

Для произвольных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ и произвольного числа λ справедливы следующие свойства:

1) $\left[\overline{a}\times\overline{a}\right]=\overline{0}$ В других источниках информации данный пункт обычно не выделяют в свойствах, но он очень важен в практическом плане. Поэтому пусть будет.

2) $\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]=-\left[\overline{b}\times\overline{a}\right]$ – свойство тоже разобрано выше, иногда его называют антикоммутативностью.

Иными словами, порядок векторов имеет значение.

3) $\left[\lambda\overline{a}\times\overline{b}\right]=\lambda\left[\overline{a}\times\overline{b}\right],\quad \left[\overline{a}\times(\lambda\overline{b})\right]=\lambda\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]$ – сочетательные или ассоциативные законы векторного

произведения. Константы выносятся за пределы векторного произведения. Действительно, чего им там делать?

4) $\left[(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}\right]=\left[\overline{a}\times\overline{c}\right]+\left[\overline{b}\times\overline{c}\right],\quad \left[\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})\right]=\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]+\left[\overline{a}\times\overline{c}\right]$ –

распределительные или дистрибутивные законы векторного произведения.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1.Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|=2,\quad |\overline{b}|=5,\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. В данном случае:

$$\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=2\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{6}=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$

Ответ: $\overline{a}\overline{b}=5\sqrt{3}$

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{c}=-2\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}|=4\sqrt{2},\quad |\overline{b}|=8,\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{4}$.

$\overline{c} = -2\overline{a} + \overline{b}$

Решение: Сначала проясним ситуацию с вектором . Сумма векторов $-2\overline{a}$ $\overline{b}$ и $\overline{c}$ представляет собой вполне определенный вектор, который и обозначен через . Итак, по условию требуется найти

$\overline{c}\overline{d}$

скалярное произведение $\overline{c}, \overline{d}$. По идее, нужно применить рабочую формулу $\overline{c}\overline{d} = |\overline{c}| \cdot |\overline{d}| \cdot \cos\angle(\overline{c};\overline{d})$, но нам неизвестны длины векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и угол между ними. Зато в условии даны аналогичные параметры для векторов , поэтому мы пойдѐм другим путѐм:

$$\overline{c} \cdot \overline{d} = ^{(1)}$$
$$= (-2\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = ^{(2)}$$
$$= -2\overline{a} \cdot \overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{a} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{b} \cdot \overline{b} = ^{(3)}$$
$$= -2\overline{a}^2 + \overline{a} \cdot \overline{b} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{b}^2 = ^{(4)}$$
$$= -2\overline{a}^2 + 3\overline{a}\overline{b} - \overline{b}^2 = ^{(5)}$$
$$= -2|\overline{a}|^2 + 3 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b}) - |\overline{b}|^2 = ^{(6)}$$
$$= -2 \cdot (4\sqrt{2})^2 + 3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \cos\frac{\pi}{4} - 8^2 = -64 + 96\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 64 = -32$$

(1)Подставляем выражения векторов $\overline{c}, \overline{d}$.

(2) Раскрываем скобки по правилу умножения многочленов, пошлую скороговорку можно найти в статье Комплексные числа или Интегрирование дробно-рациональной функции. Повторяться уж не буду =) Кстати, раскрыть скобки нам позволяет дистрибутивное свойство скалярного произведения. Имеем право.

(3) В первом и последнем слагаемом компактно записываем скалярные квадраты векторов: $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2, \quad \overline{b} \cdot \overline{b} = \overline{b}^2$. Во втором слагаемом используем перестановочность скалярного произведения: $\overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

(4) Приводим подобные слагаемые $\overline{a} \cdot \overline{b} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} = 3\overline{a}\overline{b}$.

(5) В первом слагаемом используем формулу скалярного квадрата $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$, о которой не так давно упоминалось. В последнем слагаемом, соответственно, работает та же штука: $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2$. Второе слагаемое раскладываем по стандартной формуле $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b})$.

$|\overline{a}| = 4\sqrt{2}, \quad |\overline{b}| = 8 \quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{4}$

(6) Подставляем данные условия , и ВНИМАТЕЛЬНО проводим окончательные $\bar{c}\bar{d} = -32$ вычисления. Ответ:

$\left|\left[-3\bar{a}\times 2\bar{b}\right]\right|$, если $|\bar{a}| = \frac{1}{2},\ |\bar{b}| = \frac{1}{6},\ \angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$ Пример 3. Найти

Решение: По условию снова требуется найти длину векторного произведения. Распишем нашу миниатюру:

$$\left|\left[-3\bar{a}\times 2\bar{b}\right]\right| \stackrel{(1)}{=}$$
$$= \left|-3\cdot 2\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\right| \stackrel{(2)}{=}$$
$$= 6\cdot\left|\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\right| \stackrel{(3)}{=}$$
$$= 6\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\angle(\bar{a};\bar{b}) = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(1) Согласно ассоциативным законам, выносим константы за переделы векторного произведения.

(2) Выносим константу за пределы модуля, при этом модуль «съедает» знак «минус». Длина же не может быть отрицательной.

(3) Дальнейшее понятно.

Ответ: $\left|\left[-3\bar{a}\times 2\bar{b}\right]\right| = \frac{1}{2}$ ед.

Пример 4. Найти векторное произведение векторов $\bar{a}(-1;\,2;\,-3),\ \bar{b}(0;\,-4;\,1)$ и его длину.

Решение: Задача состоит из двух частей: во-первых, необходимо найти само векторное произведение (вектор), и во-вторых, его длину.

1) Найдѐм векторное произведение:

$$\bar{N} = \left[\bar{a}\times\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}\cdot\bar{k} =$$
$$= (2-12)\cdot\bar{i} - (-1-0)\cdot\bar{j} + (4-0)\cdot\bar{k} = -10\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$$

В результате получен вектор $\bar{N} = -10\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$, или, ещѐ можно записать $\bar{N}(-10;\,1;\,4)$.

Существует очень хороший способ проверки: как следует из определения, вектор $\bar{N}$ должен быть

ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Ортогональность векторов, как мы разбирались, проверяется с помощью скалярного произведения:

$$\bar{N}\cdot\bar{a} = -10\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 4\cdot(-3) = 10 + 2 - 12 = 0 \Rightarrow \bar{N}\perp\bar{a};$$
$$\bar{N}\cdot\bar{b} = -10\cdot 0 + 1\cdot(-4) + 4\cdot 1 = 0 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow \bar{N}\perp\bar{b}.$$

Если получилось хотя бы одно число, отличное от нуля, ищите ошибку в раскрытии определителя.

2) Вычислим длину векторного произведения. Используем простейшую формулу для вычисления длины вектора, которая рассматривалась на уроке Векторы для чайников:

$$|\bar{N}| = \sqrt{(-10)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{100 + 1 + 16} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

Ответ: $\bar{N} = -10\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k},\quad |\bar{N}| = 3\sqrt{13}$ ед. $\approx 10{,}82$ ед.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

I-2. Даны векторы $\vec a = 2\vec i + 2\vec j - \vec k$ и $\vec b = 2\vec i - \vec j + 3\vec k$. Найти длины проекций этих векторов друг на друга.

I-3. Дан вектор $\vec p = 2\vec a + 3\vec b - 5\vec c$, где $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ – взаимно перпендикулярные векторы, причем $|\vec a| = 1$, $|\vec b| = 2$ и $|\vec c| = 3$. Найти углы между вектором $\vec p$ и

а). векторами $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$; б). векторами $\vec a + \vec b$, $-(\vec a + \vec b + \vec c)$.

3. Определить угол между векторами $\bar a$ $\bar b$, заданными в координатной форме $\bar a = \{2;1;-2\}$, $\bar b = \{1;-4;2\}$.

Ответ: $\theta = 115^0 51'$

4. Найти:1) $\bar a * \bar b$; 2) $(\bar a \,\hat{,}\, 3\bar a + \bar b)$; 3) $np_{\bar a + \bar b}(\bar a - 3\bar b)$; 4) $\bar a^0$, если $\bar a = 2\bar i - 6\bar j + \bar k$; $\bar b = 6\bar i - 4\bar j - 5\bar k$.

5. Найти:1) $\bar a * \bar b$; 2) $(\bar a \,\hat{,}\, 3\bar a + \bar b)$; 3) $np_{\bar a + \bar b}(\bar a - 3\bar b)$; 4) $|\bar a|$; 5) $|\bar b|$, если $\bar a = 2\bar m + \bar n$; $\bar b = \bar m - 3\bar n$,

где $|\bar m| = |\bar n| = 2$; $(\bar m \,\hat{,}\, \bar n) = \frac{\pi}{3}$.

6. Вычислить работу, произведенной силой $\bar F = 3\bar i - 2\bar j + 4\bar k$ при перемещении материальной точки из т. $A(2;7;1)$ в т. $B(4;1;3)$.

7. Найти площадь треугольника, координаты вершин которого известны $A(-2;1;2)$, $B(3;-3;4)$, $C(1;0;9)$.

Ответ: $S_{ABC} = 19,787$.

8. Даны векторы: $\bar a = 5\bar m - \bar n$; $\bar b = 3\bar m - 2\bar n$, где $|\bar m| = |\bar n| = 2$; $(\bar m \,\hat{,}\, \bar n) = \frac{\pi}{6}$. Найти площадь параллелограмма.

9. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$, если $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$.

10. Сила $\bar F = 3\bar i - 2\bar j + 7\bar k$ приложена к точке $A(1;-2;3)$. Найти величину и направление момента этой силы относительно точки $B(2;1;2)$.

Смешанное произведение.

11.Даны координаты вершин пирамиды $A_1(5;1;-4)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(3;3;4)$, $A_4(2;2;2)$. Определить её объем.

Ответ: $V_{пир} = 4$

12. Установить компланарны ли векторы $\bar a = 2\bar i - 2\bar k$; $\bar b = \bar i + \bar j + 4\bar k$; $\bar c = 3\bar i - \bar j + 2\bar k$.

13. Найти объем пирамиды $ABCD$, если $A(7;1;2)$, $B(-5;3;-2)$, $C(3;3;5)$, $D(4;5;-1)$.

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

1. Даны векторы: a = (1, 2, 3) , b = (2,1, 4) r , c = (1,1, 5), d = (3, 6, 9), e = (2, 4, 6) . Какие из них являются коллинеарными?

1) a, b; 2) a, b , c; 3) a, d, e; 4) c, d; 5) b, c, d;

2. Скалярное произведение двух векторов 1) a = (2, 3,1) и b = (−1, 0, 4) равно:

1)1; 2) 3; 3) 2; 4) 9; 5) вектору c = −(2, 0, 4)

3. Даны векторы: a = (-1, 0, 1) , b = (−2,1,-3),c = (2, 4, 2). Какие из них являются перпендикулярными?

1) нет таких векторов; 2) a , b; 3) a, c; 4) все векторы; 5) b, c. 4.

Даны векторы: a = (1, 2, 3), b = (1, 0, 2). Найти линейную комбинацию 2a+3b. 1) (5, 4,12); 2) (2, 2, 5); 3) (5, 2, 5); 4) (1, 0, 6); 5) (0, 2,1).

5. Ранг системы векторов a_1 = (2, 3,1), a_2 = (1, 0,1), a_3 = (4, 3, 3) равен: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5;

6. Дана система векторов: a_1 = (1, 2, 2), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (−1, 2, 2).

Базисом данной системы являются векторы:

1) a_1, a_2, a_3; 2) a_1 ; 3) a_2; 4) a_3; 5) любые два.

7. Заданы векторы: a = (1,-1), b = (2,1), c = (2, 2) в единичном базисе. Вектор c в базисе a, b имеет

координаты:

$=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; 2) $c=\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$; 3) $c = 1,1$; 4) $c = 3,0$; 5) $c = 1,2$

8. Длина вектора a(4;3) равна:

1)1) 1; 2) 7; 3) $\sqrt{7}$; 4) 25; 5) 5. с .

9 Угол между векторами a(2;4) и b(3;6) равен: 1) 0 ; 2) 90^0 ; 3) 45^0 ; 4) 180^0 ; 5) 350^0

10. Даны точки A(3;8), B(-5;4). Найдите координаты вектора AB.

1) (-2;12); 2) (8;4); 3) (-1;6); 4) (-4;-2); 5) (-8;-4).

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 7 и еѐ актуальность. Прямые на плоскости.
Знание фундаментальных основ аналитической геометрии способствует формированию специализированных знаний, соединяющих профессиональные знания и умения узких специалистов и широкие общенаучные фундаментальные знания.

2. Учебные цели:
- Обучение студентов основным понятиям аналитической геометрии.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**
- основы аналитической геометрии;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**
- решать задачи, используя уравнения прямых на плоскости;

и овладеть способность применять навыки работы с современной аппаратурой способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1) Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом
2) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении
3) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки
4) Угол между двумя прямыми
5) Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых
6) Общее уравнение прямой
7) Взаимное расположение двух прямых на плоскости
8) Расстояние от точки до прямой **4. Вид занятия**: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

Тест по теме «Прямая на плоскости»

Вариант 1

1.Укажите неверное утверждение.
Пусть d – прямая, $\vec{a}$ – её направляющий вектор, тогда:

а) $\vec{a} \neq 0$;

б) существует ещё хотя бы один направляющий вектор для d;

в) $\vec{a}//d$;

г) $\vec{a}$ однозначно определяет положение прямой d.

2. Пусть d- прямая, $\vec{a}(a_1, a_2)$ – направляющий вектор, k – угловой коэффициент, $M_0(x_0y_0)$, $M_1(x_1y_1)$ є d. Укажите уравнения прямой d:

а) $\begin{cases} x = tx_0 + a_1 \\ y = ty_0 + a_2 \end{cases}$;

б) $a_2(x - x_0) = a_1(y - y_0)$;

в) $\frac{x+x_1}{x_0+x_1} = \frac{y-y_1}{y_0-y_1}$;

г) $y = kb + x$.

3. Прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, тогда координаты направляющего вектора прямой имеют вид:

а) $(-B, A)$;

б) $(B, -A)$;

в) (A, C);

г) (A, B).

4. Установите соответствие между неполными уравнениями прямой и её положением на плоскости:

1) $By + C = 0$;	а) прямая проходит через ось Oy;
2) $Ax + By = 0$;	б) прямая параллельна оси Ox;
3) $By = 0$;	в) прямая проходит через начало координат;
4) $Ax = 0$.	г) прямая параллельна оси Oy;
	д) прямая проходит через ось Ox.

5. Прямая задана уравнением: $-2x + 3y + 5 = 0$. Даны три точки $M_1(0, -2)$, $M_2(5, 3/2)$, $M_3(2, 1)$. Указать верные высказывания.
а) прямая d пересекает отрезок M_1M_2;
б) прямая d пересекает отрезок M_1M_3;

в) M_2и M_3 лежат по одну сторону от d;
г) M_3 лежит в одной полуплоскости с началом координат.

6.Две прямые на плоскости, заданные общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, параллельны, если:
а) $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$;
б) $\frac{A_1}{A_1} = \frac{B_1}{B_2}$;
в) $\frac{A_1}{C_1} = \frac{A_2}{C_2}$;
г) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

7. Две прямые на плоскости, заданные общими уравнениями пересекаются, если:
а) $\frac{A_1}{A_1} \neq \frac{B_1}{B_2}$
б) $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
в) нормаль к одной прямой является направляющим вектором второй;
г) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

8. Прямая задана уравнением: $y = kx + b$, тогда вектор нормали к прямой имеет координаты:
а) $(1, k)$;
б) $(k, -1)$;
в) $(2k, -2)$;
г) совпадающие с координатами направляющего вектора для прямой $-x - ky + b = 0$.

9. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой d: $Ax + By + C = 0$ равно
а) $|\overrightarrow{M_0M_1}|$, где M_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на d;
б) длине какого-либо вектора нормали;
в) $\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$;
г) $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

10. Расстояние от точки $M_0(5, 6)$ до прямой $4x + 3y - 47 = 0$ равно:
а) 11/5;
б) 4,5;
в) 9/5;
г) -9/5.

11. Пусть d_1: $A_1x + B_1y + C_1$ и $A_2x + B_2y + C_2$ – прямые, φ – угол между ними, тогда
а) $\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2}\cdot\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2}}$;
б) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2+B_1B_2}$;
в) φ=90°, если $A_1B_2 - B_1A_2 = 0$;
г) φ=90°, если $B_1B_2 + A_1A_2 = 0$.

12. Прямые заданы уравнениями: $y_1 = 5x - 7$ и $y_2 = 3x + 5$. Найти угол φ между прямыми:

а) $arctg\frac{1}{8}$;
б) 30°;
в) $-arctg\frac{1}{8}$;
г) 90°.

13. Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $\mathrm{A}(3,5)$ и $\mathrm{B}(4,2)$ равен:
а) -9;
б) -7;
в) -$\frac{1}{9}$;
г) 7.

14. Расстояние от точки $\mathrm{A}(1,-2)$ до прямой $x-2y-5=0$ равно:
а) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$;
б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$;
в) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$;
г) 0.

15. Площадь прямоугольника, образованного прямыми $5x+7y+5=0$, $5x+7y+3=0$, $7x-5y-12=0$, $7x-5y-6=0$ равна:
а) $\frac{6}{37}$кв. ед.;
б) 9 кв. ед.;
в) $\frac{21}{37}$ кв. ед.;
г) $\frac{12}{37}$ кв. ед.

16. В треугольнике ABC: A $(-2,1)$ и C $(4,3)$. AB=BC. Тогда уравнение медианы BM имеет вид:
а) $3x+y-7=0$;
б) $x+3y+5=0$;
в) $3x+y-5=0$;
г) $3x+y+7=0$.

17. Укажите верные утверждения:
а) Не существует прямой, угловой коэффициент которой равен нулю.
б) По уравнениям прямых нельзя определить, пересекаются они или нет.
в) Для того, чтобы определить расстояние между параллельными прямыми, недостаточно знать их уравнения.
г) Зная направление векторы прямых, можно определить, перпендикулярны ли они.

18) Сколько вершин треугольника $\Delta M_1M_2M_3$ M_1(-3,2), M_2(0,0), M_3(-3,0) лежит внутри треугольника, образованного прямыми: x + y - 4 = 0, 3x – 7y + 8 = 0, 4x – y – 31 = 0 ?
а) одна б) две в) три г) ни одной

19) Биссектрисы углов, образованных двумя прямыми 2x – 3y – 5 = 0 и 6x – 4y + 7 = 0 заданы уравнениями:
а) 8x – 7y + 2 = 0
б) 2x + 2y – 17 = 0
в) 4x – y + 12 = 0
г)10x – 10y – 3 = 0

20) Прямые ax – 2y – 1 = 0 и bx – 4y – b = 0 параллельны при:
а) a = 3, b = 6;
б) a = 6, b = 4;
в) a = 1, b = 2;
г) a = 3, b = 2;

21) Прямая параллельна оси OY и принадлежит пучку прямых α(2x + y - 5) + β(3x – 2y + 1) = 0. Тогда её уравнение имеет вид:
а) 5x +1 = 0 б) 6x +2 = 0 в)7x – 9 = 0 г) 3x – 2 = 0

22) В параллелограмме ABCD уравнение AB: 2x + y - 3 = 0, координаты D(1,-3). Тогда уравнение стороны DC:
а) x—2y —7 = 0;
б) x + 2y + 5 = 0;
в) 4x + 2y + 2 = 0;
Г) 2x + y + 2 = 0;

23) Уравнение прямой, отсекающей на оси абсцисс направленный отрезок равный 5, а на оси ординат равный -2, считая от начала координат имеет вид:
а) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = -1$;
б) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$;
в) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1$;
г) $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = -1$;

24) Укажите верные утверждения:
а) Зная уравнения сторон треугольника и координаты точки, невозможно определить, лежит эта точка внутри треугольника или нет.
б) Для того, чтобы составить уравнение прямой, достаточно знать прямую, которой она параллельна.
в) Для того, чтобы записать уравнение прямой, достаточно знать ее точку и направляющий вектор.
г) Зная уравнение прямой в общем виде, можно определить ее угловой коэффициент.

25) Уравнение прямой имеет вид: 3x + 2y – 6 = 0.Тогда расстояние от точки пересечения этой прямой с осью абсцисс до оси ординат равно:
а) 1 б) 3 в) 4 г) 2

Вариант 2

1) Пусть d - прямая, a $и$ I - её произвольные направляющие векторы, тогда
а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;
б) существует еще хотя бы один направляющий вектор прямой d;
в) $\vec{a} + \vec{b}$;- направляющий вектор прямой d;
г) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единственным образом определяют положение прямой d на плоскости.

2) Пусть d - прямая, $\vec{a}$ (a_1,a_2) - направляющий вектор, к - угловой коэффициент, $M_0(x_0,y_0)$, M_1, $(x_1, y_1) \in d$. Укажите верные уравнения прямой d:
а) $\begin{cases} x = ta_1 + x_0 \\ y = ta_2 + y_0 \end{cases}$
б) $a_1(x - x_0) = a_2(y - y_0)$
в) $\frac{(x-x_0)}{(x_0-x_1)} = \frac{(y-y_1)}{(y_0-y_1)}$
г) y - y_0- kx = - kx

3) Прямая задана своим общим уравнением Ax + By + C=0, A ≠ 0, B ≠ 0, C ≠ 0. Тогда направляющими векторами будут:

а) $\vec{a}$ (0,0) б) $\vec{b}$ (2B, 2A) в) $\vec{c}$ (B, -A) г) $\vec{d}$ (-B, A)

4) Установите соответствие между неполными уравнениями прямой и положением её в пространстве.

	а) прямая параллельна оси Ox
1) By + C =0	б) прямая проходит через ось Ox
2) Ax + By = 0	в) прямая проходит через ось Oy
3) By = 0	г) прямая проходит через начало координат
4) Ax = 0	д) прямая параллельна оси Oy

5. Пусть дана прямая: 3x + 4y-7 = 0 и точки Mj(l,2), M_2(-3,1/2), M_3(-5,7). Тогда

а) прямая d пересекает отрезок M_1M_2;

б) прямая d пересекает отрезок M_1M_3;

в) точки M_2 и M_3 лежат по одну сторону от прямой d;

г) точка M_2 лежит в одной полуплоскости с точкой O (0,0).

6. Две прямые на плоскости, заданные общими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, совпадают, если:

а)$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

б) имеют один направляющий вектор;

в) $A_1B_1 = A_2B_2$;

г) имеют один направляющий вектор и по крайней мере одну общую точку;

7. Две прямые на плоскости пересекаются, если:

а) они имеют одну и только одну общую точку ;

б) они не параллельны;

в) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;

г) их направляющие векторы неколлинеарные.

8. Пусть прямая d задана общим уравнением Fx + Dy + H = 0. Вектор $\vec{n}$ (x,y) является нормалью к прямой d, если

а) x = D, y = F;

б) x = F, y = D;

в) x и y удовлетворяют уравнению: -Dx + Fy = 0;

г) длина вектора h равна расстоянию от некоторой точки до прямой d.

9. Прямая задана уравнением: $y = kx + b$. Дана точка $M_1(x_1, y_1)$. Тогда расстояние от точки M_1 до прямой равно:

а) M M_2, где точка M_2 - основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на d;

в) равно $\frac{|kx_1 - y_1 + b|}{\sqrt{k^2+1}}$;

б) равно $\frac{|kx_1 + y_1 - b|}{\sqrt{k^2-1}}$

г) равно 0, если $y_1 - kx_1 - b = 0$.

10. Расстояние от точки M_0 (3,8) до прямой 3x − 4y + 13= 0 равно:

а) 4,5 б) $2\frac{1}{6}$ в) 2 г) -2

11. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: y = $k_1x + b_1$ + , и $y = k_2x + b_2$, Ф-угол между данными прямыми, тогда

а) $\varphi = 90°$, если $k_1 k_2 = 1$;

б) $\tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2 + 1}$

в) $\tan\varphi = \frac{k_2 + k_1}{-k_1 k_2 + 1}$

г) $\varphi = 0^0$, если $k_2 = k_1$

12. Прямые заданы уравнениями: 5x + 7y-41 = 0 и 3x-9y + 17 = 0. Найти угол φ между прямыми:

а) $arctg\frac{13}{24}$ б) $arctg\frac{11}{8}$ в) $arctg\frac{1}{2}$ г) 60^0

13. Угловой коэффициент прямой $4x + 3y - 8 = 0$ равен:

а) $\frac{3}{4}$ б) $-\frac{3}{4}$ в) $-\frac{4}{3}$ г) $\frac{4}{3}$

14. Площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла:

а) 6 кв. ед. б) 12 кв. ед. в) 4 кв. ед. г) 2 кв. ед.

15. Две прямые имеют направляющие векторы $\vec{a}$ (1,-2) и $\vec{b}$ (3,-4). Тогда тангенс угла между прямыми:

а) $-\frac{2}{3}$ б $\frac{2}{11}$ в) $\frac{2}{9}$ г) $\frac{1}{11}$

16. Площадь квадрата со сторонами $3x - 2y - 1 = 0$ и $3x - 2y - 13 = 0$ и равна

а) 36 б)144 в)$\frac{72}{13}$ г)$\frac{144}{13}$

17. В треугольники ABC: A(-1,-2) и C(4,1). M_1(0,1) – середина AB, M_2- середина BC. Тогда уравнение $M_1 M_2$:

а) $x + y - 1 = 0$

б)$3x - 5y - 5 = 0$

в)$3x - 5y + 5 = 0$

г)$3x + 5y + 5 = 0$

18. Укажите верные утверждения:

3) Прямая задана своим общим уравнением Ax + By + C=0, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Тогда направляющими векторами будут:

а) $\vec{a}$ (0,0) б) $\vec{b}$ (2B, 2A) в) $\vec{c}$ (B, -A) г) $\vec{d}$ (-B, A)

4) Установите соответствие между неполными уравнениями прямой и положением её в пространстве.

	а) прямая параллельна оси Ox
1) By + C =0	б) прямая проходит через ось Ox
2) Ax + By = 0	в) прямая проходит через ось Oy
3) By = 0	г) прямая проходит через начало координат
4) Ax = 0	д) прямая параллельна оси Oy

5. Пусть дана прямая: 3x + 4y-7 = 0 и точки Mj(l,2), M_2(-3,1/2), M_3(-5,7). Тогда

а) прямая d пересекает отрезок M_1M_2;

б) прямая d пересекает отрезок M_1M_3;

в) точки M_2 и M_3 лежат по одну сторону от прямой d;

г) точка M_2 лежит в одной полуплоскости с точкой O (0,0).

6. Две прямые на плоскости, заданные общими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, совпадают, если:

а) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

б) имеют один направляющий вектор;

в) $A_1B_1 = A_2B_2$;

г) имеют один направляющий вектор и по крайней мере одну общую точку;

7. Две прямые на плоскости пересекаются, если:

а) они имеют одну и только одну общую точку ;

б) они не параллельны;

в) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;

г) их направляющие векторы неколлинеарные.

8. Пусть прямая d задана общим уравнением Fx + Dy + H = 0. Вектор $\vec{n}$ (x,y) является нормалью к прямой d, если

а) x = D, y = F;

б) x = F, y = D;

в) x и y удовлетворяют уравнению: -Dx + Fy = 0;

г) длина вектора h равна расстоянию от некоторой точки до прямой d.

9. Прямая задана уравнением: $y = kx + b$. Дана точка $M_1(x_1, y_1)$. Тогда расстояние от точки M_1 до прямой равно:

а) M M_2, где точка M_2 - основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на d;

в) равно $\frac{|kx_1 - y_1 + b|}{\sqrt{k^2+1}}$;

б) равно $\frac{|kx_1 + y_1 - b|}{\sqrt{k^2-1}}$

г) равно 0, если $y_1 - kx_1 - b = 0$.

10. Расстояние от точки M_0 (3,8) до прямой 3x – 4y + 13= 0 равно:

а) 4,5 б) $2\frac{1}{6}$ в) 2 г) -2

11. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1x + b_1 +$, и $y = k_2x + b_2$, Ф-угол между данными прямыми, тогда

а) Если произведение угловых коэффициентов двух прямых равно единице, то прямые перпендикулярны.

б) Если угловые коэффициентами прямых равны, то прямые совпадают.

в) Для того, чтобы записать уравнение прямой, достаточно знать координаты ее точки.

г) В прямоугольной системе координат угловой коэффициент прямой - это тангенс угла между этой прямой и осью абсцисс.

19. $M_1(-1,1), M_2(2,-3)$. Отрезок M_1M_2пересекает прямую:

а) $2x + 3y - 4 = 0$

б) $x - y + 10 = 0$

в) $x - 2y + 8 = 0$

г) $3x - 7y + 3 = 0$

20. Прямые 3x – y - 4 = 0 и 2x + 6y + 3 = 0 пересекаются. Уравнение биссектрисы угла, в котором лежит начало координат:

а) 4x + 8y + 11 = 0;
б) 8x - 4y + 5 = 0;
в) 8x + 4y - 5 = 0 ;
Г) 4x - 8y - 11 = 0 ;

21. Прямые ax - 2y - 11 = 0 и 6x - 4y - 9 = 0 параллельны при:
а) a = 3 б) a ≠ 12 в) a ≠ 3 г) a = 12

22. Уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых α(x + 2y - 5) + β(3x - 2y + 1) = o и параллельной оси OX:
а) y+ 1 = 0 б) y + 2 = 0 в) y + 3 = 0 г) y - 2 = 0

23. Прямая $(\alpha + 2)ч + (\alpha^2 - 9)y + 3\alpha^2 - 8\alpha + 5 = 0$ параллельна оси абсцисс при α равном:

а) -2 б) 2 в) 3 г) 1

24. Укажите верные утверждения:
а) A_1x + B_1y + C_1 =0 и A_2 + B_2y + C_2 = 0. Условие перпендикулярности этих прямых: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.
б) Уравнение прямой в отрезках нельзя привести к уравнению в общем виде.
в) Если направляющие векторы коллинеарны, то прямые совпадают.
г) Прямая заданная уравнением 17 = 0 параллельна оси ординат.

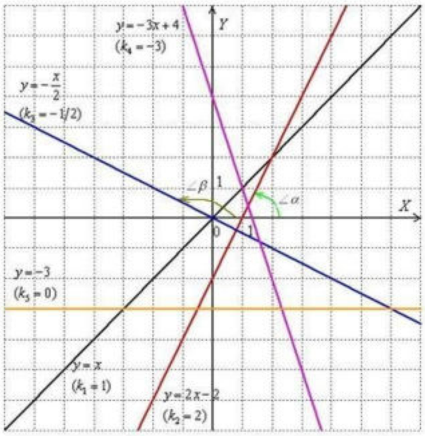
25. Прямая $(\mathfrak{m} - 1)x + (2\mathfrak{m} - 1)y + 7 = 0$ параллельна на оси ординат при $\mathfrak{m}$ равном:

а) -1 б) $-\frac{1}{2}$ в) $\frac{1}{2}$ г) 1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Всем известный «школьный» вид уравнения прямой $y = kx + b$ называется уравнением прямой с k угловым коэффициентом Например, если прямая задана уравнением $y = 2x - 2$, $k = 2$ то её угловой коэффициент: . Рассмотрим геометрический смысл данного коэффициента и то, как его значение влияет на расположение прямой:



Общее уравнение прямой

Знакомимся с общим уравнением прямой. Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

Как составить уравнение прямой по точке и направляющему вектору?

Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1; p_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

Иногда его называют *каноническим уравнением прямой*.

Уравнение прямой в отрезках.

Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{M} + \frac{y}{N} = 1$, где M, N – ненулевые константы. Некоторые типы уравнений нельзя представить в таком виде, например, прямую пропорциональность $Ax + By = 0$ (так как свободный член C равен нулю и единицу в правой части никак не получить).

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3; -2)$ принадлежит данной прямой.

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$. В данном случае:

$$y-(-2)=\frac{3}{2}\cdot(x-3)$$

$$y+2=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$$

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$$

Ответ: $y=\frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л.- 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с.№ 1-17 (с. 31).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

1. Дан треугольник с вершинами A (-2; 0), B (2; 4) и C (4; 0). Укажите координаты середины стороны AB. 1)(-2;-2); 2) (0;2); 3) (2;2); 4) (3;2); 5)(1;0).

2. Дан треугольник ABC с вершинами A (– 3; 0), B (-5; -3) и C (3; 0). Составьте уравнение стороны AB. 1) 2x − 3+8= 0; 2)3x +2y-9=0; 3) 2x −3y-9=0; 4)3x-2y+9=0; 5)3x−2y-9=0 .

3.Угловой коэффициент прямой 5y-2x+7= 0 равен:

1) 2; 2) 2/5; 3) -7/5; 4) 5/2; 5) –7.

4. Ордината точки пересечения прямой 3y-4x+6=0 сосью Oy равна:

1)-2; 2) 3; 3)-6;4) $1\frac{1}{3}$; 5) 4. 5. Уравнение прямой, пересекающей ось Ox в точке с абсциссой 3, а ось Oy в точке с ординатой 8 имеет вид:

1) y =3x+8;2) 8y=x + 3; 3) $\frac{x}{8}+\frac{y}{3}=1$; 4) 3x+8y=0;5) $\frac{x}{3}+\frac{y}{8}=1$

6, Какие из данных прямых проходят из начала координат: а) x-y=0; б) 2x+y =1; в) y–5=0 ; г)3y=0; д) 1-5x=0? 1) а и б; 2) б и в; 3) б и д; 4) в и г; 5) г и а.

7. При каком значении k прямыеy=5x-2 и y= kx+5параллельны?

1) -2; 2) 0,2;3) -5; 4) –0,2; 5) 5.

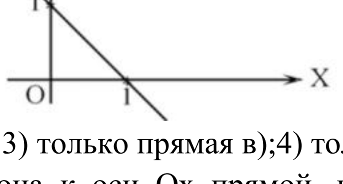
8. При каком значении k прямые y=2x+4 и y= kx−3 перпендикулярны?

1) -2; 2) –0,5; 3) 0,5; 4) –0,25; 5) 2.

9. Найдите точку пересечения прямых x + y – 3 = 0 и 2x + 3y – 8 = 0.

1) (2; 1); 2) (– 1; – 2);3) (3; 2);4) (1; 2);5) (– 2; 3).

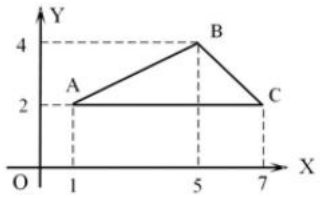
10. Какие из прямых: a) x–y=0; в) x+y+1=0; c) x=1; d) y=1 параллельны прямой, изображѐнной на рисунке.



1) ни одна;2) только прямая а);3) только прямая в);4) только прямая с);5) только прямая d).

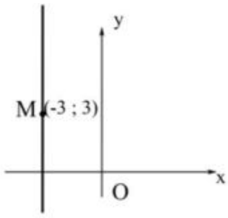
11. Найти тангенс угла наклона к оси Ox прямой, проходящей посторонe AC ΔABC, изображѐнного на

рисунке



1) -2; 2) 0,2;3) 0; 4) –0,2; 5) 5.

12. Уравнение прямой, изображѐнной на рисунке,



имеет вид:

1) –x-3=0; 2) y-3=0; 3) x+y=0; 4)x-y=6; 5) x-y=0.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающихся, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 8 и eè актуальность. Линии второго порядка.

Курс геометрии содержит разнообразный материал, однако одним из ее центральных разделов является теория кривых второго порядка. Решение задач, связанных с кривыми второго порядка, иногда вызывают большие затруднения. Некоторые понятия кривых второго порядка встречаются в физике. Например, по гиперболе движутся альфа-частицы в опыте Резерфорда при рассеивании их ядром атома; по эллипсам движутся планеты вокруг Солнца, по параболе – тело в однородном поле силы тяжести, брошенное под углом к горизонту. Отсюда ясна большая роль, которую играют линии второго порядка в физике.

2. Учебные цели: Изучение уравнений кривых второго порядка.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- канонические уравнения кривых второго порядка, основные формулы, связывающие различные характеристики этих кривых, а также уметь пользоваться преобразованиями декартовых координат на плоскости. Необходимо уметь строить матрицу перехода к новому базису, матрицу поворота вокруг начала координат на заданный угол, а также переносить начало координат.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- методами аналитической геометрии для решения задач, возникающих при формализации простых геометрических моделей;
- методами линейной алгебры для решения систем линейных уравнений второго и третьего порядка; - методом координат для решения задач аналитической геометрии.

и овладеть способность применять навыки работы с современной аппаратурой способность и готовность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.
Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

Тест по теме «Линии второго порядка»

Вариант 1

1. Уравнением линии второго порядка являются уравнения вида:

а) $2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$
б) $\frac{x^2}{a^2} = 1$
в) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$
г) $axyz = 0$

2. Дополните
Эллипсом называется множество точек ___________________________, есть величина равная _________________.

3. Укажите верное высказывание: Если точка М - произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1, F_2 – его фокусы, то
а) $|F_1M| + |F_2M| = 2a$
б) $|F_1M| - |F_2M| = 0$
в) $|F_2M| + |F_1M| = 0$
г) $|F_1M| + |F_2M| = const$

4. Укажите верное высказывание:
а) главная ось эллипса является его осью симметрии;
б) любой эллипс симметричен относительно начала координат;
в) существует прямая, пересекающая эллипс в двух точках;
г) эксцентриситет эллипса равен 1.

5. Укажите верное высказывание:
а) гипербола состоит из двух ветвей;
б) фокусы гиперболы лежат на единственной оси;
в) если $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $A1(a, 0), A2(-a, 0)$ – вершины гиперболы
г) эксцентриситет гиперболы равен 1.

6. Укажите верное высказывание:
а) парабола всегда лежит в одной полуплоскости относительно оси Ox;
б) парабола - график квадратичной функции;
в) существует прямая, которая пересекает параболу в одной точке;
г) эксцентриситет параболы больше 1.

7. Линия второго порядка задана общим уравнением, $\Delta = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2$.
Установите соответствие:

1) $\Delta = 0$	а) относительно кривой не существует асимптотических направлений
2) $\Delta > 0$	б) существует два асимптотических направления
3) $\Delta < 0$	в) линия имеет одно асимптотических направление
	г) любое направление будет асимптотическим

8. Уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ в точке (3,0) имеет вид:

а) $\frac{x}{9}+\frac{y}{25}=1$ в) $\frac{x}{3}=1$

б) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ г) $\frac{y}{5}=1$

9. Уравнение диаметра кривой $x^2-2xy+4y^2-6x+2y-7=0$ сопряженного оси Ох имеет вид:

а) $x-y-3=0$ в) $2x+6=2y$

б) $y-3+x=0$ г) $3-y=x$

10. Установите взаимно-однозначное соответствие между точками относительно эллипса заданного уравнением $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$

1) принадлежит эллипсу
2) лежат внутри
3) лежат вне

а) M(0,3)
б) M(3,5)
в) M($\sqrt{5}$,4)
г) M(-3,1)
д) M(-1,2)

11. Укажите верные утверждения для кривой, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

а) это гипербола с действительной осью Ох;
б) фокусы кривой имеют координаты F_1 (c,0), F_2 (-c,0);
в) кривая пересекает ось Оу;
г) это мнимый эллипс.

12. Укажите верные утверждения:

а) если линия имеет центры, то каждый центр принадлежит каждому диаметру;
б) у параболы все диаметры параллельны;
в) парабола не имеет центра;
г) существует пара пересекающихся диаметров параболы.

13. Каноническое уравнение эллипса при $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a=3$ имеет вид:

а) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$ в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=-1$

б) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$ г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$

14. Каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку (-5,3) и имеющей $\varepsilon=\sqrt{2}$ имеет вид:

а) $x^2+y^2=16$ в) $x^2-y^2=16$

б) $x^2+16y^2=1$ г) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$

15. Эллипс может быть задан уравнениями:

а) $x^2-17y^2=17$
б) $9x^2+25y^2=1$
в) $-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=-1$
г) $-18x^2-19y^2=1$

16. Выбрать верные утверждения для гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:
а) гипербола не проходит через начало канонической системы координат;
б) гипербола не симметрична относительно начала координат;
в) вершины гиперболы симметричны относительно оси Оу;
г) если прямая имеет с гиперболой общие точки, то их ровно две.

17. Верно ли, что:
а) парабола $y = x^2 + 1$ имеет вершину в точке (0,1);
б) парабола $y = 2x^2$ имеет фокус в точке ($\frac{1}{2}$,0);
в) парабола x= $y^2 + 3$ имеет вершину в точке (0,3);
г) парабола $x = 16y^2$ имеет директрису $x = 4$.

18. Директрисы эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ имеют уравнения:
а) $x = \pm 6$
б) $x = \pm\sqrt{20}$
в) $x = \pm 9$
г) $x = \pm 4$

19. На эллипсе $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ указать все точки, отстоящие на пять единиц от его малой оси. Их координаты равны:
а) (5,2) и (2,5)
б) (5,-2) и (-2,-5)
в) (5,2), (-5,2)
г) (5,2), (-5,2), (-5,-2), (5,-2)

20. Выбрать уравнения прямых, касающихся эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$:
а) $x + 2\sqrt{5}y - 5\sqrt{5} = 0$
б) $\sqrt{5}x + 10y - 25 = 0$
в) $\frac{2\sqrt{5}}{25}x + \frac{y}{5} = 1$
г) $x + 2y - 9 = 0$

21. Указать верные утверждения для гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$:
а) Фокусы гиперболы лежат на оси Оу;
б) Один из фокусов гиперболы имеет координаты F (16,0);
в) Эксцентриситет гиперболы равен 5/4;
г) Уравнения директрис имеют вид $x = \frac{5}{16}$.

22. Для параболы $y^2 = 12x - 24$ определить истинность следующих утверждений:
а) точка (0, $\sqrt{24}$) – вершина параболы;
б) фокус параболы имеет координаты F(0,3);
в) фокальный параметр параболы равен 6;
г) прямая x = 2 имеет одну общую точку с параболой.

23. Указать уравнения касательных к параболе $y^2 = 16x$
а) $3y = 8(x + \sqrt{3})$;
б) $8x - 4y + 8 = 0$;
в) $4y = 5(x + 1)$;
г) $x - 0.5y + 1 = 0$.

24. Даны уравнения гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ и эллипса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.

Верно ли, что:
а) их фокусы совпадают;
б) вершины гиперболы являются фокусами эллипса;
в) гипербола проходит через фокусы эллипса;
г) произведение эксцентриситетов равно 1.

Вариант 2

1. Уравнение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ можно привести к каноническому:

а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
б) $\frac{x^2}{a^2} = 0$
в) $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$
г) $a^2 - x = 0$

2. Гиперболой называется множество точек плоскости ____________________________, равна длине данного отрезка PQ __________________.

3. Укажите верное высказывание: Если точка M - произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1, F_2 – её фокусы, то
а) $|F_1M| - |F_2M| = 2a$
б) $|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$
в) $|F_1M| + |F_2M| = 2a$
г) $|F_1M| - |F_2M| = const$

4. Укажите верные высказывания:
а) чём больше эксцентриситет эллипса, тем более эллипс вытянут вдоль главной оси;
б) директрисы эллипса проходят вне эллипса;
в) эксцентриситет эллипса равен 1;
г) эксцентриситет окружности равен 0.

5. Укажите верные высказывания:
а) существует гипербола, фокусы которой не лежат на ее действительной оси;
б) любая прямая пересекает гиперболу;
в) эксцентриситет гиперболы равен 1;
г) директриса гиперболы не пересекает ее ветви.

6. Укажите верное высказывание:
а) эксцентриситет есть величина равная отношению расстояния от точки кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы;
б) парабола имеет одну ось симметрии;
в) чем больше фокальный параметр параболы, тем она уже;
г) парабола имеет две директрисы.

7. Линия второго порядка задана общим уравнением, $\Delta = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2$.
Установите соответствие:

1) $\Delta = 0$
2) $\Delta > 0$
3) $\Delta < 0$

а) существует два различных асимптотических направления
б) существует одно асимптотическое направление
в) линия эллиптического типа
г) линия параболического типа

8. Уравнением касательной к эллипсу, заданного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$ в точке $(-\sqrt{5}, 2)$ является:

а) $x + \sqrt{5}y - 10 = 0$
б) $\sqrt{5}x - 10y + 25 = 0$
в) $2\sqrt{5}x + 20y = 50$
г) $\sqrt{5}y - x = 10$

9. Для кривой $4x^2 - 6xy + y^2 - 8y + 1 = 0$ уравнение диаметра, проходящего через точку (0,1) имеет вид:

а) $x + y = 4$
б) $x + \frac{4}{7} = \frac{4}{7}y$
в) $7y - 4x + 4 = 0$
г) $7x - 4y + 4 = 0$

10. Установите взаимно-однозначное соответствие между точками относительно эллипса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$

1) принадлежит эллипсу
2) лежат внутри
3) лежат вне

а) $M(1, \sqrt{\frac{42}{5}})$
б) M(2,2)
в) M(1,1)
г) M(1,3)
д) M(5,2)

11. Укажите канонические уравнения прямых второго порядка:

а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$
б) $xy = 1$
в) $x^2 = 4$
г) $x = 2$

12. Укажите верные утверждения:

а) пара пересекающихся мнимых прямых имеет единственный центр, принадлежащий линиям;
б) парабола имеет хотя бы один центр;
в) гипербола имеет бесконечное множество действительных точек;
г) пара параллельных прямых имеет единственный центр.

13. Каноническое уравнение эллипса при $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 2$ имеет вид:

а) $x^2 + \frac{y^2}{10} = 1$
б) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1$
в) $\frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{4} = 1$
г) $-\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = -1$

14. Каноническое уравнение параболы симметричной относительно оси абсцисс и проходящей через точку M(1,2) имеет вид:

а) $y^2 = 4x$

б) $x^2 = 4y$

в) $2y^2 = 8x$

г) $\frac{x^2}{4} = y$

15. Уравнениями гиперболы являются:

а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

б) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{17} = -13$

в) $1 - 17x^2 + y^2 = 0$

г) $22y^2 + 22 = 13x^2$

16. Выбрать верные утверждения для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

а) центр эллипса равноудалён от его вершин;

б) фокальной осью называется большая ось эллипса;

в) эллипс с равными полуосями не имеет директрис;

г) фокусы эллипса расположены между директрисами.

17. Выбрать верные утверждения:

а) парабола $y = x^2$ симметрична относительно оси Ox;

б) парабола $y = x^2 + 1$ имеет фокус в точке $(0, 1\frac{1}{4})$;

в) парабола $y = x^2 + 3$ имеет директрису $x = -3\frac{1}{4}$;

г) парабола $y = 16x^2$ имеет фокус (0,4).

18. Дана гипербола $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$ и точка M(10,3). Верно ли, что:

а) $5x - 6y = 36$ –уравнение касательной к гиперболе в точке M;

б) через точку M можно провести две касательные к данной гиперболе;

в) $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

г) расстояние между фокусами равно $4\sqrt{5}$.

19. Дана гипербола $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$. Можно ли:

а) провести две касательные к гиперболе через точку (5,3);

б) провести две касательные к гиперболе через точку (5,4);

в) провести касательную к гиперболе параллельную прямой $x - 2y = 0$;

г) провести две касательные параллельные прямой $x + y - 7 = 0$.

20. Выбрать уравнения прямых, касающихся эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$:

а) $x + 2\sqrt{5}y - 5\sqrt{5} = 0$

б) $\sqrt{5}x + 10y - 25 = 0$

в) $\frac{2\sqrt{5}}{25}x + \frac{y}{5} = 1$

г) $x + 2y - 9 = 0$

21. Верно ли, что:

а) один из фокусов эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ является фокусом параболы $y^2 = 16x$;

б) один из фокусов гиперболы $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$ является вершиной параболы $y^2-2x+14=0$;
в) фокусы парабол $y^2-6x+30=0$ и $y^2=8x+40$ являются фокусами гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$;
г) эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{13}=1$ всегда лежит внутри параболы $y^2=2p(x+7)$.

22. Парабола задана уравнением $y^2=18x$. Верно ли, что:
а) она имеет две точки пересечения с прямой $6x+y-6=0$;
б) она имеет две точки пересечения с прямой $9x-2y+2=0$;
в) прямая $4x-y+5=0$ – касательная к параболе;
г) прямая $y-3=0$ имеет одну общую точку с параболой.

23. 23. Линия второго порядка, проходящая через точку A(7,3) и имеющая фокус F (3,0) и директрису $x = 12$, есть:
а) окружность $x^2+y^2=135$;
б) парабола $y^2=135-18x$;
в) эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$;
г) гипербола $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{27}=1$.

24. Выбрать уравнения, являющиеся уравнениями касательных к гиперболе $\frac{x^2}{12}-y^2=1$, и составляющие с осью OX углы $\pm 30°$:
а) $x-\sqrt{3}y-3=0$;
б) $3x+\sqrt{3}y+3=0$;
в) $x-y+\sqrt{3}=0$;
г) $x+\sqrt{3}y+3=0$.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Понятие алгебраической линии и её порядка

Линию на плоскости называют *алгебраической*, если в **аффинной системе координат** её уравнение имеет вид $F(x;y)=0$, где $F(x;y)$ – многочлен, состоящий из слагаемых вида kx^my^n (k – действительное число, m,n – целые неотрицательные числа).

Как видите, уравнение алгебраической линии не содержит синусов, косинусов, логарифмов и прочего функционального бомонда. Только «иксы» и «игреки» в целых неотрицательныхстепенях.

Далее под словом «линия» по умолчанию будет подразумеваться алгебраическая линия на плоскости **Порядок линии** равен максимальному значению $m+n$ входящих в него слагаемых.

По соответствующей теореме, понятие алгебраической линии, а также её порядок не зависят от выбора **аффинной системы координат**, поэтому для $(O,\bar{i},\bar{j})$ $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ имеет вид B,D,E действительные числа(A,B,C *принято записывать* не равны одновременно нулю. $2Dx+2Ey+F=0$ D,E , и если коэффициенты лёгкости бытия считаем, что все последующие выкладки имеют место быть в **декартовых координатах**

Общее уравнение линии второго порядка ,
где A, B, C, D, E, F – произвольные *с*

множителем-«двойкой»), причём коэффициенты
Если $A = B = C = 0$, то уравнение упрощается до
одновременно не равны нулю, то это в точности **общее уравнение «плоской» прямой**, которая представляет собой *линию первого порядка*.
Многие поняли смысл новых терминов, но, тем не менее, в целях 100%-го усвоения материала сунем пальцы в розетку. Чтобы определить порядок линии, нужно перебрать все слагаемые её уравнения и у каждого из них найти сумму степеней входящих переменных. Например:
$2Dx$ слагаемое содержит «икс» в 1-й степени; слагаемое
$2Ey$ содержит «игрек» в 1-й степени; в слагаемом
F
переменные отсутствуют, поэтому сумма их степеней равна нулю.

Далее из полученных чисел выбирается максимальное значение, в данном случае единица, – это и есть порядок линии.

Теперь разберёмся, почему уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ задаёт линию **второго** порядка:

Классификация линий второго порядка

С помощью специального комплекса действий любое уравнение линии второго порядка приводится к одному из следующих видов:

a и b *(– положительные действительные числа)*

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$ – каноническое уравнение эллипса;

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы;

3) $y^2 = 2px \quad (p > 0)$ – каноническое уравнение параболы;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – **мнимый** эллипс;

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

6) – пара **мнимых** пересекающихся прямых (с единственной действительной точкой пересечения в начале координат);

7) – пара параллельных прямых; 8) – пара **мнимых** параллельных прямых;

$y^2 - a^2 = 0$

$y^2 + a^2 = 0$

$y^2 = 0$

9) – пара совпавших прямых.

Эллипс и его каноническое уравнение

Правописание… пожалуйста, не повторяйте ошибок некоторых пользователей Яндекса, которых интересует «как построить эллибз», «отличие элипса от овала» и «эксцентриситет элебса».

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a, b – положительные действительные числа, причѐм $a > b$.

Гипербола и еѐ каноническое уравнение

Общая структура изложения материала будет напоминать предыдущий параграф. Начнѐм с общего понятия гиперболы и задачи на еѐ построение.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a, b – положительные действительные числа.

У гиперболы две **асимптоты**. **определение параболы:**

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудалѐнных от данной точки F d F и данной прямой , не проходящей через точку F.

Точка d называется **фокусом** параболы, прямая – **директрисой** *(пишется с одной «эс»)* параболы. Константа «пэ» канонического уравнения $y^2 = 2px$ называется **фокальным параметром**, который равен расстоянию от фокуса до директрисы. В данном случае $p = 2$. При этом фокус имеет координаты $x + \frac{p}{2} = 0$ $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а

директриса задаѐтся уравнением .

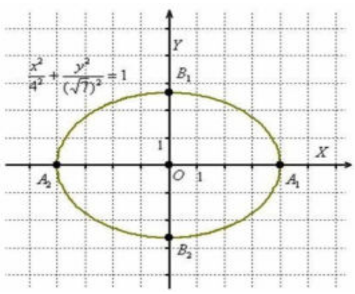
7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

Решение: сначала приведѐм уравнение к каноническому виду: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$.

Одно из преимуществ канонического уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ заключается в том, что оно позволяет моментально определить **вершины эллипса**, которые находятся в точках $A_1(a; 0), A_2(-a; 0), B_1(0; b), B_2(0; -b)$. Легко заметить, что координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

В данном случае $A_1(4; 0), A_2(-4; 0), B_1(0; \sqrt{7}), B_2(0; -\sqrt{7})$:



Пример.Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20$

Решение: на первом шаге приведём данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Пожалуйста, запомните типовой порядок действий. Справа необходимо получить «единицу», поэтому обе части исходного уравнения делим на 20:

$$\frac{5x^2 - 4y^2}{20} = \frac{20}{20}$$

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = 1$$

Здесь можно сократить обе дроби, но оптимальнее сделать каждую из них **трѐхэтажной**:

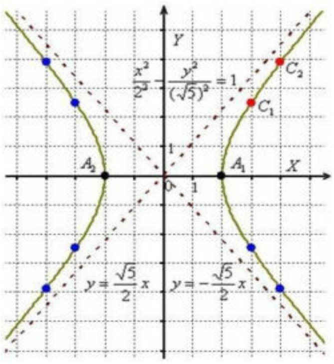
$$\frac{x^2}{\frac{20}{5}} - \frac{y^2}{\frac{20}{4}} = 1$$

И только после этого провести сокращение:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Выделяем квадраты в знаменателях:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$



Пример.

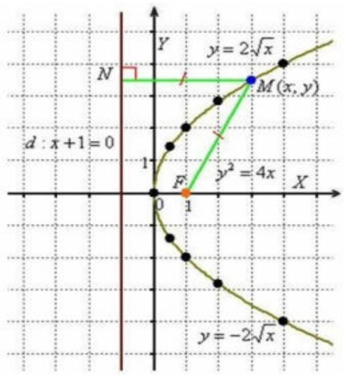
Построить параболу $y^2 = 4x$

Решение: вершина известна, найдѐм дополнительные точки. Уравнение $y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ определяет верхнюю дугу параболы, уравнение $y = -2\sqrt{x}$ – нижнюю дугу.

В целях сократить запись вычисления проведѐм «под одной гребѐнкой» $y = \pm 2\sqrt{x}$:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41;$$
$$x = 1 \Rightarrow y = \pm 2 \cdot \sqrt{1} = \pm 2;$$
$$x = 2 \Rightarrow y = \pm 2 \cdot \sqrt{2} \approx \pm 2{,}83;$$
$$x = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \cdot \sqrt{4} = \pm 4.$$

В примере $F(1; 0), \quad d : x + 1 = 0$:



7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи: Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с.) № 1-28 (с. 101-104).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий:

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы обучающимися, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 9 и еѐ актуальность. Функции.

Актуальность темы «Функции» тесно связана с математическим анализом, который лежит в основе общего естественнонаучного подхода.

2. Учебные цели:

-дать обучающимся представление о понятии функции, способах их задания, погрешностях вычисления, рассмотреть некоторые элементарные функции.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- основные элементарные функции - способы задания функций.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- формировать умение находить область определения и область значения функции,
- способами задания функций.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: кино и видеофильмы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Следует отличать два простых понятия: область определения функции и непрерывность функции.

Данная функция определена на всей числовой прямой, то есть для каждого значения «икс» существует своё значение «игрека» $y = f(x)$. В частности, если $x = k$ $y = f(k) = m$, то . Заметьте, что другая точка выколота, ведь по определению функции, значению аргумента должно соответствовать единственное значение функции. Таким образом, область определения нашей функции: $D(f) = \Re$ $x = k$. Однако эта функция не является непрерывной на $\Re$! Совершенно очевидно, что в точке она терпит разрыв. Термин тоже вполне вразумителен и нагляден, действительно, карандаш здесь по любому придётся оторвать от бумаги. Немного позже мы рассмотрим классификацию точек разрыва. **Непрерывность функции в точке и на интервале**

В той или иной математической задаче речь может идти о непрерывности функции в точке, непрерывности функции на интервале, полуинтервале или непрерывности функции на отрезке. То есть, не существует «просто непрерывности» – функция может быть непрерывной где-то. И основополагающим «кирпичиком» всего остального является непрерывность функции в точке.

Если односторонние пределы конечны и равны (как в нашем случае): $\lim\limits_{x \to k-0} f(x) = \lim\limits_{x \to k+0} f(x) = m$, то

будем говорить, что существует общий предел $\lim\limits_{x \to k} f(x) = m$. Всё просто, общий предел – это наш «обычный» предел функции, равный конечному числу.

Заметьте, что если функция не определена при $x = k$ (выколите чѐрную точку на ветке графика), то перечисленные выкладки остаются справедливыми. Как уже неоднократно отмечалось, в частности, в статье о бесконечно малых функциях, выражения $x \to k-0$, $x \to k+0$, $x \to k$ означают, что «икс» бесконечно близко приближается к точке k, при этом не имеет значения, определена ли сама функция в данной точке или нет.

Определение: функция непрерывна в точке k, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$.

Определение детализируется в следующих условиях:

1) Функция должна быть определена в точке k, то есть должно существовать значение $f(k)$.

2) Должен существовать общий предел функции $\lim_{x \to k} f(x)$. Как отмечалось выше, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim_{x \to k-0} f(x) = \lim_{x \to k+0} f(x)$. 3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$. Непрерывность функции на интервале формулируется остроумно и очень просто: функция непрерывна на интервале $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке данного интервала. Точка разрыва первого рода

Если в точке k нарушено условие непрерывности и односторонние пределы конечны, то она называется точкой разрыва первого рода.

Разрыв такого вида (с существующим общим пределом) называют устранимым разрывом. Почему устранимым? Потому что функцию можно доопределить в точке разрыва:

Второй, более грустный случай носит название разрыва первого рода со скачком. А грусть навевают односторонние пределы, которые конечны и различны. Пример изображѐн на втором чертеже урока. Такой разрыв возникает, как правило, в кусочно-заданных функциях,

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. Исследовать функцию $y = f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертѐж.

Решение: 1) Под прицел попадает единственная точка x=1, в которой функция не определена. 2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} (x^2) = 1$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} (x^2) = 1$$

Односторонние пределы конечны и равны. Таким образом, в точке $x = 1$ функция терпит устранимый разрыв. Как выглядит график данной функции?

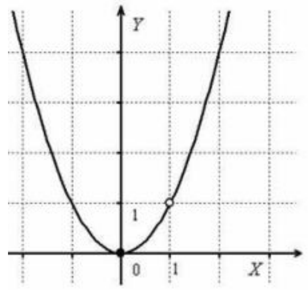
Хочется провести упрощение $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x-1} = \frac{x^2(x-1)}{x-1} = x^2$ параболы. Но исходная функция не определена в точке $x = 1$

$f(x) = x^2$, если $x \neq 1$

, и вроде бы получается обычная

, поэтому обязательна следующая оговорка:

Выполним чертѐж:



Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки x=1, в которой она терпит устранимый разрыв.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-6 (с. 149-150).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-13 (с. 78-80).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор задач.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 10 и еѐ актуальность. Теоремы о пределах функций.

Теория пределов играет основополагающую роль в математическом анализе, позволяет определить характер поведения функции при заданном изменении аргумента. С помощью предела можно выяснить, имеет ли функция в заданной точке разрыв. Через пределы определяются такие понятия математики как производная, неопределенный и определенный интегралы, составляющие основу дифференциальных уравнений, которые, в свою очередь получили непосредственное применение в медицинской практике.

Пределы являются основным средством в построении теории рядов.

2. Учебные цели:

-получение навыков нахождения пределов функций; - изучение геометрического смысла предела функции.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- место понятия предела в математическом анализе;
− понятие предела функции в точке и на бесконечности;
− теоремы о пределах;
− понятие бесконечно малой, бесконечно большой функции; − виды неопределенностей, способы их раскрытия; −замечательные пределы.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- вычислять пределы функций в точке и на бесконечности; − раскрывать неопределенности. **и овладеть** способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1.Определение предела функции в точке;
2.Геометрическая интерпретация предела функции в точке;
3.Определение предела функции на бесконечности;
4.Геометрическая интерпретация предела функции на бесконечности;
5.Непрерывность функции;
6.Теоремы о пределах;
7.Свойства пределов;
8.I замечательный предел;
9.II замечательный предел.

4. Вид занятия: практическое занятие. **5. Продолжительность занятия:**2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал (таблицы, графики).

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

Вычислить значения функций в заданных точках:

1. $f(x) = x^2 - x + 1;\quad f(2),\quad f(a+1).$

2. $\varphi(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1};\quad \varphi(3/2),\quad \varphi(1/x),\quad \dfrac{1}{\varphi(x)}.$

3. $F(x) = x^2;\quad \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a},\quad F\left(\dfrac{a+h}{2}\right) - F\left(\dfrac{a-h}{2}\right).$

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Вычисление пределов

Для вычисления предела функции необходимо знать основные свойства пределов. В приводимых ниже теоремах будем считать, что функции $f(x)$, $g(x)$ имеют общую область определения, содержащую

точку x_0, и обладают пределами в этой точке. ***Теорема 1.*** Предел суммы двух функций равен сумме их пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Теорема 2. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Теорема 3. Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от 0:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

1-ый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

2-ой замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме. 1.1. Найти $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 7x + 4)$.

Решение. Для нахождения предела данной функции заменим аргумент x его предельным значением: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 7x + 4) = 3^2 - 7\cdot 3 + 4 = -8$

1.2.Найти $\lim \dfrac{x^2 \quad x \quad 2}{2 \quad 2x \quad 8}$.

→

− + = − · + = −

→

x 2 x + +

→ + +

Решение. Проверим, не обращается ли знаменатель дроби в нуль при x=2: имеем

2^2 + · + = 2 2 8 ≠ 16 0. Подставив предельное значение аргумента, находим x^2 x = — = 2 2^2 2 2

→ + 8 + 1 + · +

lim$x$ 2 x2 2x 8 22 2 2 8 16 2

Рассмотрим теперь такие примеры, когда применение свойств предела становится возможным лишь после некоторых предварительных преобразований.

2 x 2 x

1.3.Найти lim . x 0 5x

Решение. Здесь пределы числителя и знаменателя при $x \to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, получим

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$=\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{5\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-6x+7)$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$
3. $\lim\limits_{\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}$
4. $\lim\limits_{\to\infty}\frac{x^2-5x+8}{2x^3-x+1}$ x
5. $\lim\limits_{\to\infty}\frac{x^2+8x-1}{x^5+7x^3+11}$ x
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ x
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$
8. $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 8-71 (с. 151).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-9 (с. 113-114).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

В-1

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{10}{x}\right)^{x}$ а) e^{10}; б) 10e; в) e/10

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$ а) 6; б) 4; в) 2; г) 4/3; д) 1/2

3. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ а) 6; б)1/4; в) 8; г) 3

В-2

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ а) 1; б) π ; в) π $/^2$; г) e

2. $\lim\limits_{\to\infty}\dfrac{7x^2-5x+1}{3+14x^2+2x}$ а)1/2; б) 5/14; в) 5/2; г) 1/3 x

3. $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{z^2-1}{z+1}$ а) -2; б) 2; в) 0; г) ∞

z

В-3

1. lim √2 x 2 x 0 x а) 0; б) ∞ ; в) 2 ; г) − 2 4

2. lim 5 2x 12x 2 x 3x 2x 9 а)- 6; б)5/3; в) -4; г) -1/2

3. lim 1-cos2x2 x 0 3x а) 1/3; б) -1/6; в) 1/6; г) 2/3

Правильные ответы: В-1:1.а;2.в;3.б; В-2:1.а; 2.а; 3.а; В-3: 1-г; 2.в; 3. г.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 11 и еѐ актуальность. Нахождение предела функции.

Теория пределов играет основополагающую роль в математическом анализе, позволяет определить характер поведения функции при заданном изменении аргумента. С помощью предела можно выяснить, имеет ли функция в заданной точке разрыв. Через пределы определяются такие понятия математики как производная, неопределенный и определенный интегралы, составляющие основу дифференциальных уравнений, которые, в свою очередь получили непосредственное применение в медицинской практике.

Пределы являются основным средством в построении теории рядов.

2. Учебные цели:

-получение навыков нахождения пределов функций; - изучение геометрического смысла предела функции.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

− понятие предела функции в точке и на бесконечности;

− теоремы о пределах;

− понятие бесконечно малой, бесконечно большой функции; − виды неопределенностей, способы их раскрытия; − замечательные пределы.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- вычислять пределы функций в точке и на бесконечности; − раскрывать неопределенности.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1.Определение предела функции в точке;

2.Геометрическая интерпретация предела функции в точке;

3.Определение предела функции на бесконечности;

4.Геометрическая интерпретация предела функции на бесконечности;
5.Непрерывность функции;
6.Теоремы о пределах;
7.Свойства пределов;
8.I замечательный предел;
9.II замечательный предел.

4. **Вид занятия**: практическое занятие.

5. **Продолжительность занятия:** 2 часа.

6. **Оснащение**:

    6.1. Дидактический материал (таблицы, графики).

    6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. **Содержание занятия:**

    7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме:

    7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены. Для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени**.**

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители или умножить числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

    7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Решение. Максимальная степень «икса» в числителе: 2. Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1.

(x можно записать как x^1). Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

<u>Пример.</u> Решить предел $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

<u>Пример.</u> Вычислить предел $\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$.

Сначала «чистовой» вариант решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель:

$$8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$$

Знаменатель:

$$x^2+4x-12=0$$
$$D=16+48=64$$
$$\sqrt{D}=8$$
$$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6\quad x_2=\frac{-4+8}{2}=2$$
$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$$

Пример. Найти предел

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x\quad 21}}{5x-15}$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)}=\frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)}=$$

$$=\frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)}=\frac{-9}{30}=-\frac{3}{10}$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи.

x^3 $3x^2$ $2x$

1.Вычислить $x^{\lim}$ 2 $_{x\,6}$

$2\,x$

$2x^3$ $3x^2$ 5

2.Найти lim 3 x 1 + – x +

$3x$

sin $5x$

3.Найти lim x 0

sin $7x$

4.В питательную среду вносят 1000 бактерий. Численность N бактерий возрастает согласно уравнению $1000t$

$N(t)$ = 1000 + 100 t^2 (*закон роста*), где t – время в часах. Определить максимальное количество бактерий.

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. **Тема занятия № 12 и её актуальность**. Задачи, приводящие к понятию производной. Производная функции.

Формирование понятия производной исторически связано с двумя задачами: задачей нахождения скорости движения и задачей проведения касательной к кривой. Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин. Производные высших порядков имеют широкое применение в физике.

2. **Учебные цели**: Получение навыков нахождения производных функций. Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен

знать:

- теоремы и формулы для нахождения производных функций;
- правила отыскания производных от функций, полученных из основных элементарных с помощью операций сложения, умножения, деления.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить производные функций;
- использовать таблицу производных от основных элементарных функций для нахождения производных функций.
- решать задачи с использованием производной

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие производной функции.

2)Производная суммы, разности, произведения, частного функций. 3)Производные от основных элементарных функций.

4)Производная сложной функции.

5)Производная обратной функции.

6)Производная неявной функции.

7)Физический смысл производной.

8)Геометрический смысл производной.

9)Производные высших порядков.

10)Физический смысл производной второго порядка.

4. **Вид занятия**: практическое занятие.

5. **Продолжительность занятия:** 2 часа.

6. **Оснащение**:

   6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

Вопросы для самоконтроля.

1. Производная функции. Определение.
2. Основные правила вычисления производной (производная суммы, разности, произведения и частного двух функций).
3. Производная сложной функции. Правило вычисления. Таблица производных для основных элементарных функций (степенная и показательная функции, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, логарифмическая функция).

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

Тест

1.Физический смысл первой производной: производная функции y=f(x) по аргументу x есть

1. мгновенное ускорение переменного движения.
2. мгновенная скорость изменения функции.

2. Угловой коэффициент касательной к графику функции в данной точке равен

1. значению ее производной в точке касания.
2. значению ее второй производной в точке касания.

3. Физический смысл второй производной: вторая производная от пути S по времени t равна

1. мгновенной скорости.
2. мгновенному ускорению переменного движения.
3. работе переменной силы.

4. Производная постоянной величины равна

1. нулю.
2. единице.
3. x.

5. Производная функции y=x равна

1. нулю.
2. x^2. 3. единице.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Общее правило нахождения производной

Операцию отыскания производной некоторой функции называют дифференцированием функции.

Правила дифференцирования

1. $C' = 0$, C - постоянная

2. $(x)' = 1$

3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$

4. $(uv)' = u'v + v'u$

5. $(Cu)' = Cu'$, C - постоянная

6. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

7. $y'_x = y'_u u'_x$

Формулы дифференцирования

Основные элементарные функции

$' \frac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$; $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\sqrt{\ }\ ' \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (lnx) =; (x) = ;

(a) =a lna$^{x\ x}$;

$' = e^x$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -$ $' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $'$

(e^x) $' = \frac{1}{1-x^2}$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{1-x^2}$ $\sin x$; $(tgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$; $(ctgx)' = -\sin x1_2$

$(\arcsin x)$; $(arcctgx)$; $(arctgx)' \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение. Представим данную функцию в виде произведения: $x^2 = x\,x$. Используя теперь правило IV,

находим $(x^2)' = (x\,x)' = x'x + xx' = 2x$ поскольку $(x)' = 1$. Итак, $(x^2)' = 2x$. №2. Найти производную функции $y = \ln x + \cos x$.

Решение. Данная функция, представляет собой сумму двух слагаемых. Поэтому, используя правило III и табличные значения получаем

$y' = (\ln x + \cos x)' = (\ln x)' + (\cos x)' = \frac{1}{x} - \sin x$.

№3. Найти производную функции $y = x^7 \cdot 2^x$.

Решение. Поскольку заданная функция есть произведение двух сомножителей, то применяя правило IV и табл.формулы, находим

$$y' = (x^{7 \cdot 2^x})' = (x^7)' \cdot 2^x + x^7 \cdot (2^x)' = 7x^6 \cdot 2^x + x^7 2^x \ln 2 = x^6 \cdot 2^x (7 + x \ln 2)$$

№4. Найти производную функции $y = \frac{x \cdot \cos x}{1 + 2e^x}$.

Решение. Согласно правилу 4.

$$y' = \frac{(x \cdot \cos x)' \cdot (1 + 2e^x) - x \cdot \cos x \cdot (1 + 2e^x)'}{(1 + 2e^x)^2}$$

Теперь воспользуемся правилами 4, 3, 5 и табличными формулами. В итоге получим

$$y = \frac{((x)' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)') \cdot (1 + 2e^x) - x \cdot \cos x \cdot ((1)' + 2(e^x)')}{(1 + 2e^x)^2} =$$

$$= \frac{(1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)) \cdot (1 + 2e^x) - x \cdot \cos x \cdot 2e^x}{(1 + 2e^x)^2} = \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (1 + 2e^x) - 2x \cdot e^x \cdot \cos x}{(1 + 2e^x)^2}$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Найти производные следующих функций:

1. $y = 3x^2 - 2x + 1$; 2. $y = 2^x \sin x$ _ $3^x \cos x$; 3. $y = {}^{4 - \ln} x^{x}$; 4. $y = {}^3\ x \cdot arctgx + {}^3 2$

e

5. $y =$ $\cdot$ $= +$ arcsin$x$ $ctgx$; 6. y ^{7}

$^x x$; 7. $y +$ sin

x^{tgx} cos$x$ e

Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-32 (с. 202-205).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1, 2(1-20) (с. 157-158).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий, ситуационные задачи.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 13 и еѐ актуальность. Основные способы дифференцирования функций.

Формирование понятия производной исторически связано с двумя задачами: задачей нахождения скорости движения и задачей проведения касательной к кривой. Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин. Производные высших порядков имеют широкое применение в физике.

2. Учебные цели: Получение навыков нахождения производных функций. Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- теоремы и формулы для нахождения производных функций;
- правила отыскания производных от функций, полученных из основных элементарных с помощью операций сложения, умножения, деления.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить производные сложной функции;

- решать задачи с использованием производной.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие производной функции.
2)Производная суммы, разности, произведения, частного функций.
3)Производные от основных элементарных функций.
4)Производная сложной функции.
5)Производная обратной функции.
6)Производная неявной функции.
7)Физический смысл производной.
8)Геометрический смысл производной.
9)Производные высших порядков.
10)Физический смысл производной второго порядка.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1. Производная функции. Определение.
2. Основные правила вычисления производной (производная суммы, разности, произведения и частного двух функций).
3. Производная сложной функции. Правило вычисления. Таблица производных для основных элементарных функций (степенная и показательная функции, тригонометрические и обрат- ные тригонометрические функции, логарифмическая функция).

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Производная сложной функции

$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$; $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$; $(u)' = nu^{n-1} \cdot u'$; $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;

$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$; $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot u'$; $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$; $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1: Найти производную функции $y = \sin(3x-5)$. Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**. Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x-5)$ при $x = 1$ (вместо единицы может быть любое число). В первую очередь нужно будет выполнить следующее действие: , поэтому многочлен $3x-5$ и будет внутренней

$3 \cdot 1 - 5 = -2$

$\sin(-2)$

функцией. Во вторую очередь нужно будет найти , поэтому синус – будет внешней функцией. Сначала находим производную $u'(v)$ внешней функции (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что $(\sin x)' = \cos x$. **Все табличные формулы применимы и в том, случае, если «икс» заменить сложным выражением**, в данном случае: $u'(v) = \cos(3x-5)$. Обратите внимание, что внутренняя функция $v = 3x-5$ не изменилась, её мы не трогаем. Результат применения формулы $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так. Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0) =$$
$$= 3\cos(3x-5)$$

$$y = (2x+1)^5$$

Пример 2. Найти производную функции . Повторяем еще раз: **любая табличная формула справедлива не только для «икс», но и для сложного выражения**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)'$$

. Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)' =$$
$$= 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2+0) = 10 \cdot (2x+1)^4$$

Пример 3. Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

Пример 4. Найти производную функции

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}} \cdot (arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

Пример 5. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}$. Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}\right)' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$: Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}\right)' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}}(x^2 + tgx + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}}\left((x^2)' + (tgx)' + (15)'\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}}\left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Пример 6. Найти производную функции $y = -2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x$.

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, получаем:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$

$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)'\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)' =$$

$$= -2(1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot (3x)') + (2x - 4 + 0)\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)\cos 7x \cdot (7x)' =$$

$$= -2(e^{3x} + 3xe^{3x}) + (2x - 4)\sin 7x + 7(x^2 - 4x + 3)\cos 7x$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 33-64 (с. 202-205).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 2 (21-41), 3 (с. 158).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий, ситуационные задачи.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 14 и еѐ актуальность. Экстремумы функций.

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций. Методы исследования функции широко используются как в теории, так и на практике. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции с помощью производной широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин.

2.Учебные цели:

-научиться решать задачи с использованием производной и применять ее для нахождения характеристик для исследования функции.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- нахождение интервалов возрастания и убывания функций;
- исследование функций на максимум и минимум;
- нахождение уравнения касательной к кривой графика функции в некоторой точке.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- вычислять производные функций в точке и на бесконечности;
- использовать таблицу производных от основных элементарных функций для нахождения производных функций.
- исследовать функции и строить графики.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1) Определение возрастающей на интервале функции.
2) Определение убывающей на интервале функции.
3) Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале.
4) Определение максимума и минимума функции.
5) Необходимые и достаточные условия существования экстремума дифференцируемой функции.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1) Определение возрастающей на интервале функции.
2) Определение убывающей на интервале функции.
3) Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале.
4) Определение максимума и минимума функции.
5) Необходимые и достаточные условия существования экстремума дифференцируемой функции.

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Функция называется возрастающей на интервале]a,b[, если для любых точек x_1, x_2 из этого интервала из условия $x_2>x_1$ следует неравенство

1. $f(x_2)\le f(x_1)$; 2. $f(x_2)<f(x_1)$; 3. $f(x_2)\ge f(x_1)$;4. $f(x_2)>f(x_1)$

2. Функция называется убывающей на интервале]a,b[, если для любых точек x_1, x_2 из этого интервала из условия $x_2>x_1$ следует неравенство

1) $f(x_2)\le f(x_1)$; 2) $f(x_2)<f(x_1)$; 3) $f(x_2)\ge f(x_1)$;4) $f(x_2)>f(x_1)$

3. Достаточное условие возрастания функции

1)Если производная функции y=f(x) отрицательна на интервале]a,b[; 2) Если производная функции y=f(x) положительна на интервале]a,b[.

4. Необходимое условие экстремума

1. f(x)=0; 2. f`(x)=0; 3. f``(x)=0

5. Если в точке x_1 производная функции равна нулю и при переходе через точку x_1 производная меняет знак с плюса на минус, то x_1 – точка

1. минимума функции; 2. максимума функции.

6. Функция $y=x^2-2$ имеет экстремум в точке

1. x=0; 2. x=1; 3. x=-1; 4. x=2; 5. x=-2

7. Определить интервал возрастания функции $y=x^2+1$

1. $(-\infty, 0)$; 2. $(0, +\infty)$; 3. $(-\infty, 1)$; 4. $(1, +\infty)$; 5. $(-\infty, +\infty)$

8. Определить интервал убывания функции $y=2x^2+3$

1. $(-\infty, 3)$; 2. $(3, +\infty)$; 3. $(-\infty, 0)$; 4. $(0, +\infty)$; 5. $(-\infty, +\infty)$ Ответы на тесты:

1.4, 2.2, 3.2,4.2, 5.2, 6.1, 7.2, 8.3 1. Производная второго порядка функции y=cos2x равна:

1. -4cos2x
2. 4cos2x
3. 4sin2x
4. -2sin2x

2. Функция y=x+1:

1. Имеет максимум в точке x=1.
2. Имеет минимум в точке x=1.
3. Не имеет экстремума.
4. Имеет максимум в точке x=0. 3. Четная функция:

1. y=-x
2. y=1+2x
3. y=cos2x
4. y=sin2x

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Функция $y = f(x)$ может убывать или возрастать не во всей своей области определения. Эта область часто распадается на промежутки, в одних из которых функция убывает, в других — возрастает.

Точка x_0, отделяющая промежуток возрастания от промежутка убывания и принадлежащая области определения функции, называется точкой экстремума.

Точки экстремума бывают двух типов: точки максимума функции, где функция переходит от возрастания к убыванию (рис. 2.13; точки x_1 и x_3) и точки минимума (см. рис. 2.13; точки x_2 и x_4), где функция переходит от убывания к возрастанию.

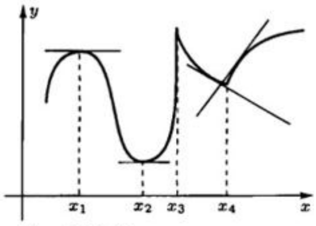


Рис. 2.13. Точки экстремума.

В точках максимума величина $f(x)$ больше, а в точках минимума — меньше, чем во всех соседних достаточно близких точках. точки, в которых функция имеет экстремумы, надлежит искать среди точек, в которых:

1) $f'(x) = 0$ либо
2) $f'(x) = \infty$ либо
3) $f'(x)$ не существует, причем предполагается, что точки эти принадлежат области определения функции. Точки указанных типов называются критическими точками I рода.

Отметим, что не в каждой критической точке функция имеет экстремум.

Пример. $y = x^3$.

$$y' = 3x^2.$$

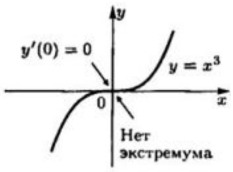


Рис. 2.15. Кубическая парабола.

Точка $x = 0$ будет для данной функции критической точкой I рода, так как $y'(0) = 0$. Однако в этой точке экстремума нет (рис. 2.15).

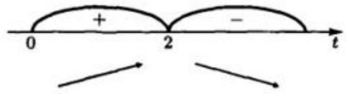
7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример. Дано уравнение прямолинейного движения точки $x = 6t^2 - t^3$ (t — в секундах, x — в метрах). Найти наибольшую скорость точки.

Решение. Скорость точки $v = x'(t) = 12t - 3t^2$. Исследуем, когда $v = v_{max}$. Итак, нужно найти наибольшее значение функции $v(t) = 12t - 3t^2$ при $t \in (0, +\infty)$.

На данном промежутке $v(t)$ дифференцируема и $v'(t) = 12 - 6t$. Найдем критические точки I рода: $v'(t) = 0$, т. е. $12 - 6t = 0$, откуда $t = 2$.

Так как в окрестности точки $t = 2$ изменился знак $v'(t)$, то в точке $t = 2$ — экстремум, причем изменение знака произошло с «+» на «−», и, следовательно, $t = 2$ — точка максимума.



Тогда $v(2) = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 12$ (м/с) — максимальное значение скорости.

Точка x_0, принадлежащая области определения функции, называется критической точкой второго рода, если в этой точке выполняется одно из 3 условий:

1) $f''(x_0) = 0$ либо
2) $f''(x_0) = \infty$ либо
3) $f''(x_0)$ не существует.

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода. Но не всякая критическая точка второго рода является

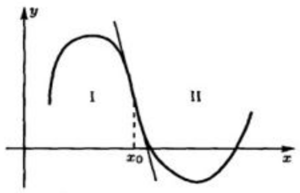


Рис. 2.20. Точки перегиба как границы промежутков выпуклости и вогнутости.

точкой перегиба. Однако если x_0 — критическая точка второго рода и в ее окрестности изменяется знак второй производной, то точка x_0 — точка перегиба.

Пример 2. Покажем исследование функции с помощью производной на примере $y=2x^3-6x$.

1. Найдем область определения функции. Область определения функции – вся числовая ось.
2. Найдем производную и, приравняв ее нулю, решим уравнение y`=0. $y` = 6x^2 – 6 = 0$ $6(x^2 - 1) = 0$ $x^2 = 1$

Отсюда $x_1=1$, $x_2=-1$. Итак, экстремум может быть в точках: $x_1=1$ и $x_2=-1$. Подсчитаем значения функции в этих точках: $x_1=1$, $y_1=-4$; $x_2=-1$, $y_2=4$.

3. Нужно узнать, имеет функция в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$ максимум или минимум, или вообще не имеет экстремума. Для этого необходимо исследовать знак первой производной в окрестностях критических точек. Рассмотрим точку $x_1=1$. Слева от нее производная отрицательна, а справа положительна. Следовательно, при переходе через точку $x_1=1$ производная меняет знак с – на +. Значит, $x_1=1$ – точка минимума функции. Рассмотрим точку $x_2=-1$. Слева от нее производная положительна, справа отрицательна. Так как производная меняет знак с + на -, то $x_2=-1$ – точка максимума.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1.Исследовать функцию с помощью производной

1) $y = x^3 + 2x^2 - 1$

2) $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$

3) $y = x^3 - 5x^2 + 8x$

4) $y = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$

1. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$. **2.** $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$. **3.** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

4. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$. **5.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. **6.** $y = \dfrac{x^3 - 1}{4x^2}$.

7. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$. **8.** $y = \dfrac{1 - 2x}{x^2}$. **9.** $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 136-150 (с. 210-211).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-3 (с. 197).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1. Установите верную последовательность:

1) Определить наибольшее и наименьшее значение функции;
2) Найти значение функции в точках x_1 и x_2;
3) Найти производную функции;
4) Прировнять производную к нулю и найти еѐ корни;
5) Определить смену знака производной при прохождении через точки x_1 и x_2;
6) Определить вид экстремума.

Правильные ответы: 342561

Задание 2. Установите соответствие между функцией и еѐ производной

1 вариант		2 вариант	
$f\;x$	$f^{/}\;x$	$f\;x$	$f^{/}\;x$
1) $f\;x\; = 3x^2 + 6x - 2$	1) $f^{/}\;x\; = \frac{1}{3x^2}$	1) $f\;x\; = 2x^2 - 7x + 3$	1) $f^{/}\;x\; = -\frac{1}{2x^2}$
2) $f\;x\; = x + x^3$	2) $f^{/}\;x\; = -3x^2$	2) $f\;x\; = x - x^2$	2) $f^{/}\;x\; = -4x^3$
3) $f\;x\; = 6\sqrt{x}+1$	3) $f^{/}\;x\; = 6x + 6$	3) $f\;x\; = 4\sqrt{x}-2$	3) $f^{/}\;x\; = 4x - 7$
4) $f\;x\; = 5 - \frac{1}{3x}$	4) $f^{/}\;x\; = \frac{3}{x}$	4) $f\;x\; = 2 + \frac{1}{2x}$	4) $f^{/}\;x\; = \frac{2}{x}$
5) $f\;x\; = 2 - x^3$	5) $f^{/}\;x\; = 1 + 3x^2$	5) $f\;x\; = 3 - x^4$	5) $f^{/}\;x\; = 1 - 2x$

Правильные ответы: 1-3; 2-5; 3-4; 4-1; 5-2

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 15 и еѐ актуальность. Применение производных к решению прикладных задач.

Применение производной позволяет более эффективно решать многие задачи повышенной сложности. Это требует от учащихся нетрадиционного мышления и способствует развитию нового, нешаблонного мышления, которое можно успешно применять также и в других сферах человеческой деятельность (вычислительная техника, экономика, физика, химия и т.д.)

2.Учебные цели:

- рассмотреть методику решения задач прикладного характера, - применять ранние полученные знания, - выделять этапы в решении прикладных задач.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- методы исследования функции с помощью производной.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- применять производные для нахождения точек экстремума функции;
- применять производные для нахождения интервалов возрастания, убывания функции;
- применять производные для нахождения точек перегиба функции;
- применять производные для нахождения интервалов выпуклости, вогнутости функции; - выполнять построение графика функции.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Заполнить таблицу

Уравнение пути $(м)$	$S=3t^3-6t^2+5t-2$
Уравнение скорости $(м/с)$	
Уравнение ускорения $(м/с^2)$	
Время $t_0(с)$	$t_0=2$
Значение скорости в момент времени t_0 $(м/с)$	
Значение ускорения в момент времени t_0 $(м/с^2)$	

2. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшения температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что Х обозначает дозу назначенного лекарства, У - функция степени реакции описывается функцией $y=R(x)=x^2(a-x)$, где а - некоторая положительная постоянная. При каком значении Х реакция максимальна?

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

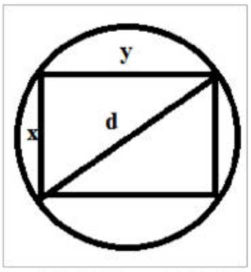
Математика является одной из самых древних наук, но роль ее в различных областях естествознания в разное время была неодинаковой. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его основные черты и свойства на языке математических понятий и соотношений, т.е. возможность построить математическую модель изучаемого объекта. Математическая модель, основанная на некотором упрощении, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако, благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг факторов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как ведет себя объект в различных условиях. Математические модели успешно применяются в физике, химии, биологии, экономике, помогают увидеть силу межпредметных связей, важную роль математики, дающей мощный аппарат для решения многих задач, которые выдвигаются и успешно решаются в различных областях науки и практики.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Задача 1. Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать стойку прямоугольного сечения с наибольшей площадью. Наибольшая площадь сечения балки необходима для использования большей нагрузки.

Решение.

1) Представим математическую модель



2) Введём переменные: x- ширина, y - длина прямоугольника. Выразим y через x по теореме Пифагора: y = $d^2 - x^2$ y= $\overline{d^2 - x^2}$

3) Выразим площадь прямоугольника S= x· y= x $\overline{d^2 - x^2}$

4) Найдём производную площади: $S' = x'$ $\overline{d^2 - x^2}$+x ($\overline{d^2 - x^2})'$ ' $= \frac{d^2-2x^2}{d^2-x^2}$

5) Определим критические точки $S' = 0$

$\frac{d^2-2x^2}{d^2-x^2} = 0,\ d^2 - 2x^2 = 0.\ 2x^2 = d^2, x = \frac{d\ \overline{2}}{2}$

2

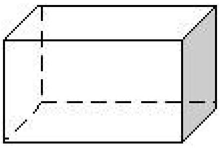
В точке $x = \frac{d\ \overline{2}}{2}$ производная меняет знак с "+" на "-", следовательно это точка максимума. В этой точке площадь прямоугольника будет наибольшей

$\overline{d^2 - x^2} = d^2 - \frac{2d^2}{4} = \frac{d\ \overline{2}}{2}$

y= $\frac{d\ \overline{2}}{2} \cdot \frac{d\ \overline{2}}{2} = \frac{d^2}{2}$, x = y

S= x· y=

Ответ: Сечение балки должно быть квадратом со стороной $\frac{d\ \overline{2}}{2}$.



Задача 2. Заводу поручено изготовить резервуар емкостью 4м^3 открытый сверху с квадратным основанием. При этом внутренняя поверхность должна быть покрыта оловом. Какими следует выбрать размеры резервуара, чтобы на его покрытие было израсходовано наименьшее количество олова? Решение.

1. Выявить величину, о наибольшем или наименьшем значении которой говорится в задаче. Sпов. – наименьшая Sпов.=Sосн+Sбок=AB^2+4AB·AA_1

2. Ввести переменную, задание которой определяет величину, указанную в задаче. Пусть AB=x. Тогда V=x^2·AA_1,

$$AA_1 = \frac{V}{x^2} = \frac{4}{x^2}$$

3. Указать допустимые значения для переменной. x>0

4. Выразить величину из пункта 1 как функцию переменной x.

4. S(x)=x^2+4·x $\cdot \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$

5. Найти наибольшее или наименьшее значение функции (п.4) на интервале, указанном в п.3.

5.

$$\frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$$

S’(x)=0; $2x^3$-16=0

x=2

На интервале (0; +∞) функция S(x) определена и непрерывна и имеет единственную стационарную точку x=2 – т. min. Значит, min S(x)=S(2)
(0; +∞)
Следовательно, чтобы на покрытие резервуара ушло наименьшее количество олова, его размеры должны быть равны AB=AD=2 (м), AA_1=1 (м). Ответ: 2х2х1.

Задача 2. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по

закону $P(t)=1000+\frac{1000t}{100+t^2}$, где t–выражается в часах.

Найти максимальный размер этой популяции.

Решение: найдем наибольшее значение функции p(t) на интервале (0; +∞).

$$p'(t)=\left(1000+\frac{1000t}{100+t^2}\right)=\frac{1000(100+t^2)-1000t\cdot 2t}{(100+t^2)^2}=\frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2};$$

p'(t)=0; 100-t^2=0; t=±10

На интервале (0; +∞) функция p(t) определена и непрерывна, и имеет единственную стационарную точку t=10 – т.max.

Значит max p(x)=p(10)= $1000+\frac{1000\,10}{100+10^2}=1050$

Ответ: максимальный размер популяции составляет 1050 особей и достигается по прошествии 10 часов роста.

Задача 3. Стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. При обработке бриллиант массой 25 карат был расколот на две части. Каковы массы частей, если известно, что при этом произошла максимальная потеря стоимости?

Решение: стоимость бриллианта $p=k\cdot m^2$, т.е. p=625k.

Пусть x – масса одного куска бриллианта, образовавшегося при расколе. Тогда (25-x) – масса другой части.

kx^2 – стоимость одной части, а $k(25-x)^2$ – стоимость другой части, где 0<x<25. $f=625k-kx^2-k(25-x)^2$ – потеря стоимости бриллианта в результате раскола (k – коэффициент пропорциональности). Рассмотрим функцию:

$f(x)=625k-kx^2-k(25-x)^2$ и найдем ее наибольшее значение на интервале (0; 25).

f'(x)=-2kx+2k(25-x)=-4kx+50k f'(x)=0; -4kx+50k=0; -4x=-50;
x=12,5

На интервале (0; 25) функция f(x) определена и непрерывна, и имеет единственную стационарную точку x=12,5 - т. max. Значит, max f(x)=f(12,5). Следовательно, масса частей 12,5 карат и 12,5 карат. Ответ: $m_1=m_2$=12,5 карат.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Самостоятельная работа: решите задачу по вариантам

Вариант 1. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки берега А. Пассажир лодки желает достигнуть села «В», находящегося на берегу на расстоянии 5 км от А. Лодка проплывает по 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села «В» в кратчайшее время?

Вариант 2. Человек, гуляющей в лесу, находится в 5 км от прямолинейной дороги и в 13 км от дома, стоящего у дороги. Скорость его передвижения в лесу 3км/ч, а по дороге – 5 км/ч. Найдите наименьшее время, за которое он сможет прийти домой.
Типовые задачи.
1. Из шара радиуса R выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы его размеры?

Ответ: высота равна 2R 3 /3, диаметр равен 2R 6 /3. 1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 70-76 (с. 206-207). 2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 5-12 (с. 197).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.
Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.
Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.
8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 16 и еѐ актуальность. Применение производной для исследования функции.
Одним из приложений производной является ее применение к построению графика функции. Построение графиков широко используются как в теории, так и на практике.

2.Учебные цели:
- построение графиков.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:** - методы исследования функции с помощью производной.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**
- применять производные для нахождения точек перегиба функции;
- применять производные для нахождения интервалов выпуклости, вогнутости функции; - выполнять построение графика функции.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1) Определение выпуклой кривой на интервале.
2) Определение вогнутой кривой на интервале.
3) Условия выпуклости и вогнутости кривой на интервале.
4) Определение точки перегиба.
5) Схема отыскания точек перегиба кривой.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Функция называется вогнутой на некотором интервале, если она расположена
1. выше всякой касательной, проведенной в произвольной точке этого интервала.
2. ниже всякой касательной, проведенной в произвольной точке этого интервала.

2. Условие выпуклости функции
 1. $f'(x)>0$; 2. $f'(x)<0$; 3. $f''(x)>0$; 4. $f''(x)<0$

3. Условие вогнутости функции
 1. $f'(x)>0$; 2. $f'(x)<0$; 3. $f''(x)>0$; 4. $f''(x)<0$

4. Определить интервал вогнутости функции $y=x^3+1$
 1. $(-\infty, 1)$; 2. $(1, +\infty)$; 3. $(-\infty, 0)$; 4. $(0, +\infty)$; 5. $(-\infty, +\infty)$

5. Определить интервал выпуклости функции $y=2x^3+3$
 1. $(-\infty, 3)$; 2. $(3, +\infty)$; 3. $(-\infty, 0)$; 4. $(0, +\infty)$; 5. $(-\infty, +\infty)$

6. Определить точку перегиба функции $y=x^2+1$
 1. (0, 1); 2. (1, 2); 3. (2, 5); 4. (-1, 2); 5. нет точки перегиба.

7. Определить точку перегиба функции $y=3x^3+1$
1. (-1, -2); 2. (0, 1); 3. (1, 4); 4. (3, 82); 5. (-3, -80) Ответы на тесты: 1.1, 2.4, 3.3, 4.4, 5.3, 6.5, 7.2

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

I. Элементарное исследование

Для построения графика удобно провести следующее исследование:

1) Установить область определения функции.

2) Найти точки пересечения графика с осями координат.

3) Исследовать функцию на четность, отметив какую-либо симметрию графика (если она существует).

Напомним, что график четной функции симметричен относительно оси OY, а график нечетной функции — относительно начала координат.

II. Нахождение асимптот графика

III. Исследование функции по первой производной (промежутки монотонности, экстремумы)

1) Найти $y'(x)$.

2) Найти критические точки I рода.

3) На ось OX нанести точки, не принадлежащие области определения функции (выколов их), а также критические точки I рода.

4) Тогда ось OX разобьется на ряд интервалов. В каждом из интервалов определить знак $y'(x)$ (для этого достаточно найти знак y' в любой точке каждого интервала, поскольку внутри любого интервала знак $y'(x)$ не меняется) и отметить полученные результаты над соответствующими интервалами.

IV. Исследование функции по второй производной (характер выпуклости и точки перегиба)

1) Найти $y''(x)$.

2) Найти критические точки II рода.

3) На ось OX нанести точки, не принадлежащие области определения, а также критические точки II рода.

V. Объединение результатов пунктов 3 и 4

Очевидно, что если, например, функция $f(x)$ возрастала в некотором интервале (a, b) и была вогнутой, то для построения графика в данном интервале нужно взять аналог правой ветви

VI. Построение графика по результатам исследования 1–5

Отметим, что иногда для уточнения вида графика целесообразно вычислить дополнительно еще несколько значений функции в «обыкновенных» точках.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Покажем исследование функции с помощью производной и построение графика функции на примере $y=2x^3-$
$6x$. 1. Найдем область определения функции. Область определения функции – вся числовая ось.

2. Найдем производную и, приравняв ее нулю, решим уравнение $y`=0$. $y`= 6x^2 – 6 = 0$
$6(x^2 - 1) = 0$ $x^2= 1$

Отсюда $x_1=1$, $x_2=-1$. Итак, экстремум может быть в точках: $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Подсчитаем значения функции в этих точках: $x_1=1$, $y_1=-4$; $x_2=-1$, $y_2=4$.

3. Нужно узнать, имеет функция в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$ максимум или минимум, или вообще не имеет экстремума. Для этого необходимо исследовать знак первой производной в окрестностях критических точек. Рассмотрим точку $x_1=1$. Слева от нее производная отрицательна, а справа положительна. Следовательно, при переходе через точку $x_1=1$ производная меняет знак с – на +. Значит, $x_1=1$ – точка минимума функции.

Рассмотрим точку $x_2=-1$. Слева от нее производная положительна, справа отрицательна. Так как производная меняет знак с + на -, то $x_2=-1$ – точка максимума.

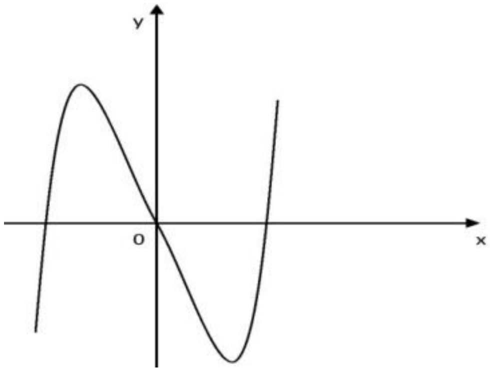
4. Исследуем функцию на вогнутость и выпуклость. Для этого найдем вторую производную

$y``=(y`)`=(6x^2 – 6)`=12x$ $y``=12x > 0$ при $x>0$. На участке $(0, + \infty)$ функция вогнута.

$y``=12x< 0$ при $x<0$. На участке $(- \infty, 0)$ функция выпукла.

5. Определим точку перегиба: $f``(x)=12x=0$, $x=0$. Слева от точки $x=0$ вторая производная отрицательна, справа положительна, значит функция $y=f(x)$ при $x=0$ имеет точку перегиба (0,0).

6. Найдем точки пересечения с осью Ox. Из уравнения $2x^3-6x=0$ находим точки пересечения: $(\sqrt{3};0)$; $(0;0)$; $(-\sqrt{3};0)$.



7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.
1.Построить график функции.

1) $y = x^3 + 2x^2 - 1$

2) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$

3) $y = x^3 - 5x^2 + 8x$

4) $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$

2. Найти пределы функции $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ слева и справа в точках $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Узнать, является ли функция непрерывной в этих точках.

3. Найти пределы функции $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ слева и справа в точках $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Узнать, является ли функция непрерывной в этих точках.

4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

5. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \le 0, \\ x^2+1, & \text{если } 0 < x < 2, \\ 2x+1, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

6. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

7. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

8. Точка движется в первом квадранте по дуге окружности $x^2 + y^2 = 100$ так, что ордината возрастает с постоянной скоростью $v = 2$. С какой скоростью изменяется абсцисса? Определить скорость изменения абсциссы в момент, когда ордината равна 6.

Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 158-166 (с. 211-212).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание.

Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 4 (с. 197).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 17 и еѐ актуальность. Дифференциал функции. Аналитический и геометрический смысл дифференциала.

Таким же важным, как и понятие производной в математическом анализе, является и понятие дифференциала функции. В приложениях математики к решению конкретных задач приходится иметь дело с величинами, числовые значения которых получены путем измерений и, следовательно, точное их значение неизвестно. Если исходные данные содержат погрешности измерений, то применение точных методов вычислений нецелесообразно. Для упрощения и облегчения вычислений в таких случаях лучше использовать приближенные методы. Теоретической основой одного из простейших приѐмов приближенных вычислений является понятие дифференциала

2.Учебные цели:

- Получение навыков нахождения дифференциалов функций.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- понятие дифференциала функции;
- понятие полного и частного дифференциала;
- формулу приближенных вычислений значений функции в точке с помощью дифференциала.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить дифференциал функции;
- применять формулу приближенных вычислений значения функции;
- находить частные и полный дифференциалы функции многих переменных

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Понятия приращение функции, приращение аргумента.
2. Определение дифференциала функции.
3. Формула приближенных вычислений значения функции.
4. **Вид занятия**: практическое занятие.
5. **Продолжительность занятия:** 2 часа.
6. **Оснащение**:
   - 6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.
   - 6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.
7. **Содержание занятия:**
   - 7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1. Выберите верные утверждения:

1) дифференциал аргумента и приращение аргумента равны, 2) дифференциал аргумента и приращение аргумента приближенно равны,

3) дифференциал функции и приращение функции равны,

4) дифференциал функции и приращение функции приближенно равны.

2. Задана функция $y = x^2$ и начальное значение аргумента $x_0 = 3$. Аргументу задано приращение $\Delta x = 0{,}005$. Выберите действия и установите их последовательность при вычислении приближенного приращения функции:
   1. $y(3) = 3^2 = 9$
   2. $y' = 2x$
   3. $\Delta y \approx dy = 6 \cdot 0{,}005 = 0{,}03$
   4. $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$
3. Установите соответствие между функцией и записью вычисления ее значения в точке 1,996

1)	$y = x^3$	а)	$\frac{1}{1{,}996^3}$
2)	$y = x^{\frac{1}{3}}$	б)	$1{,}996^3$
3)	$y = x^{-3}$	в)	$\sqrt[3]{1{,}996}$

4. Необходимо вычислить при помощи дифференциала приближенное значение функции $y = x^3 + 2x$ при $x = 4{,}025$. Следуя формуле (4.7) заполните пропуски и вычислите приближенно значение функции:
   1. $x = 4{,}025 = 4 + 0{,}025,\quad x_0 = \boxed{}\ \Delta x = \boxed{}$
   2. $y(x_0) = \boxed{}$
   3. $y' = (x^3 + 2x)' = \boxed{}$
   4. $y'(x_0) = \boxed{}$
   5. $y(4{,}025) \approx \boxed{} + \boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$

5. Частный дифференциал $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции $u = x^6y + 2x$ имеет вид:
   1. $\frac{\partial u}{\partial x}dx = (6x^5 + 2)dx$
   2. $\frac{\partial u}{\partial x}dx = (6x^5y + 2)dx$
   3. $\frac{\partial u}{\partial x}dx = (x^6 + 2x)dx$
   4. $\frac{\partial u}{\partial x}dx = (6x^5 + 2)dx$

Эталон ответов:

1. 1,4
2. 2,4,3
3. 1-б, 2-в, 3-а
4.
   1) $x = 4{,}025 = 4 + 0{,}025,\quad x_0 = \boxed{4}\ \Delta x = \boxed{0{,}025}$
   2) $y(x_0) = \boxed{4^3 + 8 = 72}$
   3) $y' = (x^3 + 2x)' = \boxed{3x^2 + 2}$
   4) $y'(x_0) = \boxed{3 \cdot 4^2 + 2 = 50}$
   5) $y(4{,}025) \approx \boxed{72} + \boxed{50} \cdot \boxed{0{,}025} = \boxed{73{,}25}$
5. 2.

1) Вычислите приращение функции y=f(x), если задано начальное значение x_0 и аргумент изменился на Δx.

а). $y = \frac{x\sqrt{x} - 5x^3 + x}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$

б). $y = \frac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}009$

в). $y = x^3 \cdot (1 - \cos x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $\Delta x = 0{,}04$

Ответы:

а) $\Delta y \approx -0{,}019$;

б) $\Delta y \approx 0{,}022$;

в) $\Delta y \approx 0{,}24\pi^2$

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1.Дифференциал функции $y = tg^2 x$ равен

1. $\frac{2tgx}{\sin^2 x}dx$ 2. $\frac{2tgx}{\sin x}dx$ 3. $\frac{2tgx}{\cos^2 x}dx$ 4. $\frac{tgx}{\sin^2 x}dx$ 5. $\frac{2}{\cos^2 x}dx$

2.Дифференциал функции $y = 3x^2 + x$ равен

1.$(6x+1)dx$ 2.$(3x+1)dx$ 3.$6xdx$ 4.$(\frac{x^2}{2}+x^3)dx$ 5.$(3x+\frac{x^2}{2})dx$

3.Дифференциал второго порядка функции $y = e^{2x}$ равен

1.$e^{2x}dx^2$ 2.$2e^{2x}dx^2$ 3.$4e^{2x}dx^2$ 4.$8e^{2x}dx^2$ 5.$16e^{2x}dx^2$

Ответы на тесты: 1.3, 2.1, 3.3

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Наряду с понятием производной одним из основных понятий дифференциального исчисления является понятие дифференциала функции.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0, называется произведение производной этой функции в точке x_0 на приращение независимой переменной.

Для обозначения используют символ $df(x_0)$ или, короче, dy. Итак, $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$, где Δx - приращение независимой переменной.

Для независимой переменной x полагают

$$dx = \Delta x$$

(Это согласуется с тем, что для функции $y = x$ получаем: $dy = dx = (x)'\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x$).

Учитывая, что $dx = \Delta x$, выражение дифференциала можно представить в следующем виде:

$$dy = f'(x)dx$$

Отметим, что из последнего равенства имеем:

$$f' = \frac{dy}{dx}.$$

Из определения дифференциала функции вытекает способ его вычисления. Очевидно, чтобы вычислить дифференциал функции, нужно ее производную умножить на dx. Отсюда следует, что правила нахождения дифференциала остаются теми же, что и для нахождения производных.

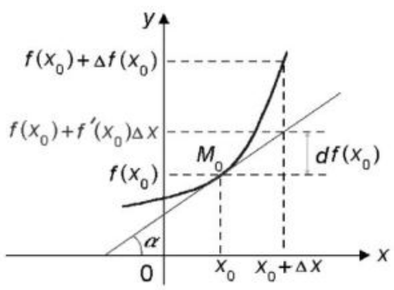
Ключевые понятия и формулы

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на приращение аргумента. Обозначается dy.

$$\boldsymbol{dy = y'\Delta x = y'dx} \quad \text{– дифференциал функции } y = f(x) \text{ по переменной } x \qquad \textbf{(4.1)}$$

$$\boldsymbol{dx = \Delta x, dy \approx \Delta y} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Геометрическая интерпретация дифференциала функции



Свойства дифференциала функции:

1) *дифференциал постоянного:* $dc = 0$;

2) *дифференциал суммы:* $d(u+v) = du + dv$;

3) *дифференциал произведения:* $d(uv) = vdu + udv$;

4) *дифференциал частного:* $d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$;

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1.

Вычислите приближенно приращение функции $y = \frac{x+1}{x^2}$, если аргумент изменился с $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}028$

Решение: приращение функции приближенно равно дифференциалу функции:

$$\Delta f(x) \approx dy = y'\Delta x = \left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)' = \frac{(x^2+1)'x^3 - (x^2+1)(x^3)'}{x^6}\Delta x$$

$$= \frac{2x \cdot x^3 - 3x^2(x^2+1)}{x^6}\Delta x = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6}\Delta x = \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6}\Delta x$$

$$= \frac{x^2(-x^2-3)}{x^6}\Delta x = \frac{-x^2-3}{x^4}\Delta x$$

Вычислим значение дифференциала при $x_1 = 1$ и $\Delta x = 1{,}003 - 1 = 0{,}003$

$$\boldsymbol{\Delta f(x)} \approx dy|_{\substack{x_1=1 \\ \Delta x = 0{,}003}} = \frac{-1^2-3}{1^4} \cdot 0{,}028 = -4 \cdot 0{,}028 = -0{,}112$$

Отве... ось на 0,112 при перехо-

де ар...

Е... $= x^2 \cdot lny$.

Решение:

Полный дифференциал записывается в виде $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Найдем частные дифференциалы:

Дифференциал функции u по переменной x: т.е. y принимается за постоянную величину, а, следовательно, и lny – постоянная величина.

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx = (x^2 \cdot lny)'_x dx = lny \cdot (x^2)'_x dx = 2x\, lny\, dx$$

Дифференциал функции u по переменной y: т.е. x принимается за постоянную величину, а, следовательно, и x^2 – постоянная величина.

$$\frac{\partial u}{\partial y}dy = (x^2 \cdot lny)'_y dy = x^2(lny)'_y dy = x^2 \cdot \frac{1}{x}dy = x\, dy$$

Тогда полный дифференциал $du = 2x\, lny\, dx + x\, dy$

Ответ: $du = 2x\, lny\, dx + x\, dy$

Пример 3. Найти дифференциал функции

Решение. Учитывая, что $y' = \frac{x \cdot \cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, в общем виде получим:

$$= \frac{x \cdot \cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \Delta x \text{ или } dy = \frac{x \cdot \cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Очевидно, чтобы вычислить дифференциал функции, нужно ее производную умножить на dx. Отсюда следует, что правила нахождения дифференциала остаются теми же, что и для нахождения производн

Приложение дифференциала функции

к приближенным вычислениям значения функции

Формула приближенного вычисления значения функции

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (4.7)$$

Алгоритм приближенного вычисления значения функции в точке x:

1. Представить x в виде суммы x_0 и Δx, $x = x_0 + \Delta x$, x_0 – должно быть как можно ближе к заданному значению x и значение функции в точке x_0 вычисляется точно.
2. Вычислить $f(x_0)$
3. Найти производную заданной функции в точке x_0.
4. Полученные значения подставить в формулу приближенных вычислений.

Из основной формулы приближенных вычислений выводятся следующие формулы:

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n}\Delta x \qquad (4.8)$$

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n x_0}\Delta x \quad \text{при x≠0} \qquad (4.9)$$

$$(1+\Delta x)^k \approx 1 + k\Delta x, \qquad k \in Z \qquad (4.10)$$

$$(x_0+\Delta x)^k \approx {x_0}^k + k{x_0}^{k-1}\Delta x \qquad (4.11)$$

dy

Пример 3.

Вычислите приближенно значение функции $y = 2x^5 - x^3 - 1$ при $x = 2{,}025$

Решение: воспользуемся алгоритмом приближенного вычисления значения функции:

1) представим x в виде суммы $x = x_0 + \Delta x$, т.е. $x = 2{,}025 = 2 + 0{,}025$, где $x_0 = 2, \Delta x = 0{,}025$;

2) вычислим $f(x_0) = f(2) = 2 \cdot 2^5 - 2^3 - 1 = 64 - 8 - 1 = 55$

3) найдем производную заданной функции: $y' = (2x^5 - x^3 - 1)' = 10x^4 - 3x^2$ и вычислим ее значение в точке $x_0 = 2$: $y'(2) = 10 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 = 160 - 12 = 148$

4) подставим значения в формулу приближенных вычислений 4.7.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$f(2{,}025) = f(2 + 0{,}025) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0{,}025 = 55 + 148 \cdot 0{,}025 = 55 + 3{,}7 = 58{,}7$$

Ответ: значение функции $y = 2x^5 - x^3 - 1$ при $x = 2{,}025$ приближенно равно 58,7

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Найти производную функции и полный дифференциал:

а) $y = 5x\ln x$; б) $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$; в) $y = x + x$;

2. Найти дифференциал функции. y arcsin(1 x^2) $2dx$

Ответ: dy = − − 2 x^2

3. $y = x^3 \ln(1 - x^2)$

= −2 − ln(1 x2) 12$xx^4$2)dx Ответ: dy (3x

Найти дифференциал второго порядка функции.

1. $y = 2x^3 + 5x^2$

Ответ: $d2y = (12x + 10)dx2$

2. $y = 5^x + x^3$

Ответ: $d^2y = (5^x \ln^2 5 + 6x)dx^2$

13.Дифференциал функции ytg x2 равен

1. $\frac{2\text{tg}x}{\sin 2x}dx$ 2. $\frac{2}{\sin 2x}dx$ 3. $\frac{2\text{tg}x}{\cos 2x}dx$ 4. $\frac{\text{tg}x}{\sin 2x}dx$ 5. $\frac{2}{\cos 2x}dx$

14.Дифференциал функции y = $3x^2$ + x равен

1.$(6x + 1)dx$ 2.$(3x$ + $x2$ 1)dx 3.6^{xdx} 4.$(x^3 + \frac{x2}{2})dx$ 5.$(3x + \frac{x2}{2})dx$

15.Дифференциал второго порядка функции $y = e^{2x}$ равен

1.$e2xdx2$ 2.2$e2xdx2$ 3.4$e2xdx2$ 4.8$e2xdx2$ 5.16$e2xdx2$

3. Дифференциал функции y=6sin(2x) равен

1. $6\cos(2x)dx$
2. $12\sin x dx$
3. $6\cos(2x)dx$
4. $12\cos(2x)dx$
5. $-12\sin(2x)dx$

Ответы на тесты:

13.3, 14.1, 15.3

Найти производные первого порядка:

1. $y = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - x$

$$' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2\sqrt[3]{x^2}} - 1$$

$$= (x^3 + 1)tgx$$

$$' = 2xtgx + \frac{x^3 + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\ln x + x}{x}$$

$$' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$= 2^x + x^3 ctgx$$

$$' = 2^x \ln 2 + 3x^2 ctgx - \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$= \sin^3 (x^2 + 1)$$

$$' = 6x \sin^2 (x^2 + 1) \cos(x^2$$

$$= \cos^2 6x$$

$$' = -6 \sin 12x$$

$$= 6 \arccos 2x + 3 \arcsin 5x$$

$$' = \frac{-12}{\sqrt{1 - 4x^2}} + \frac{15}{\sqrt{1 - 25x^2}}$$

$$= \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

$$' = -\frac{4x}{1 - x^4}$$

$$= 3e^{x^3 + x}$$

$$' = 3e^{x^3 + x}(3x^2 + 1)$$

$$^3 + y^3 - 5 = 0$$

$$' = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$^y + x^3 = y^2$$

$$' = \frac{3x^2}{2y - e^y}$$

Найти производную второго порядка функции.

$$= 2e^{-x^3}$$

$$'' = 6xe^{-x^3}(3x^3 - 2)$$

$$= 2 \cos^2 x$$

$$'' = -4 \cos 2x$$

Найти дифференциал функции.

$$= \arcsin(1 - x^2)$$

$$= \frac{-2dx}{\sqrt{2 - x^2}}$$

2. $y = x^3 \ln(1 - x^2)$

Ответ: y

2. y

Ответ: y

3. y

Ответ: y

4. y

3

Ответ: y

5. y

Ответ: y $+1)$

6. y

Ответ: y

7. y

Ответ: y

8. y

Ответ: y

9. y

Ответ: y

10. x

Ответ: y

11. e

Ответ: y

1. y

Ответ: y

2. y

Ответ: y

1. y

Ответ: dy

Ответ: $= dy(3x2 \; -x^2) - \frac{2x}{1-x^2} \; \ln(1)dx$ 4

Найти дифференциал второго порядка функции.

1. $y = 2x^3 + 5x^2$

Ответ: $d2y = (12x + 10)dx2$

2. $y = 5^x x^3 +$

Ответ: $d^2y = (5^x \ln^2 5 + 6x)dx^2$

1 уровень

Выберите правильный ответ:

1.Физический смысл первой производной: производная функции y=f(x) по аргументу x есть

1. мгновенное ускорение переменного движения.
2. мгновенная скорость изменения функции.

2. Угловой коэффициент касательной к графику функции в данной точке равен

1. значению ее производной в точке касания.
2. значению ее второй производной в точке касания.

3. Физический смысл второй производной: вторая производная от пути S по времени t равна

1. мгновенной скорости.
2. мгновенному ускорению переменного движения.
3. работе переменной силы.

4. Производная постоянной величины равна 1. нулю.

2. единице.
3. x.

5. Производная функции y=x равна

1. нулю.
2. x^2.
3. единице.

6. Производная функции $y = \sin x^2$ равна

1. $\cos x^2$
2. $x \cos x$
3. $2x \cos x^2$
4. $2x \sin x$
5. $2x \cos x$

7. Производная функции $y = x^4 + 1$ равна

1. $\frac{4x^3}{x^4+1}$.
2. $2x^3 \frac{1}{x^4+1}$.
3. $\frac{1}{2\;x^4+1}$.
4. $\frac{2x}{x^4+1}$.
5. $\frac{2x^2}{x^4+1}$.

1

8. Вторая производная функции $y = \sin 4x$ равна 1. $4\cos 4x$.
2. $16\sin 4x$.
3. $16\cos 4x$.
4. $16\cos 4x \sin 4x$.
5. $-16\sin 4x$.

9. Производная функции $y = \cos^3 x$ равна
1. $3\cos x \sin x$.
2. $3x\cos^2 x$.
3. $-3\cos^2 x \sin x$.
4. $3\cos^2 x \sin x$.
5. $3\cos x \sin^2 x$.

10. Производная функции $y = tg 2x$ равна
1. $\frac{2}{\cos^2 2x}$.
2. $\frac{2}{\sin 2x}$.
3. $\frac{2}{\cos x}$.
4. $\frac{2}{\sin x}$.
5. $\frac{2}{\cos x \sin x}$.

11. Производная произведения двух функций равна
1. $u`v \quad uv`$
2. $uv - uv`$
3. $u`v - uv$
4. $uv + uv`$
5. $u`v + uv`$

12. Производная частного двух функций равна $u`v + uv`$
1. $v_2 \; u`v \; uv$

$-$

$-$

$-$

2. v_2 $u`v$ $uv`$

3. v_2

$u`v$ $uv`$

4. v

uv $u`v$ 5. v

13.Дифференциал функции ytg ^2x равен $=$

$2tgx$

1. $\sin_{2x} dx$

-2

2. $\sin_{2x} dx$ $2tgx$

3. $\cos_{2x} dx$ tgx

4. $\sin_{2x} dx$

2

5. $\cos_{2x} dx$

14.Дифференциал функции $y = 3x^2 + x$ равен

1.$(6x+1)dx$

2.$(3x+1)dx$

3.$6xdx$

$^3 + x2$ $)dx$

4.$(x$

$+$ 2

$x2$

5.$(3x)dx$

2

15. Дифференциал второго порядка функции $y = e^{2x}$ равен

1.$e^{2x}dx^2$

2.$2e^{2x}dx^2$

3.$4e^{2x}dx^2$

4.$8e^{2x}dx^2$

5.$16e^{2x}dx^2$

Ответы на тесты:

1.2, 2.1, 3.2, 4.1, 5.3, 6.3, 7.2, 8.5, 9.3, 10.1, 11.5, 12.3, 13.3, 14.1, 15.3

Типовые задачи. Найти дифференциал функции.

1. $y = \ln\sin x$

2. $y = \operatorname{arctg} 2x$

3. $y = \operatorname{tg}^3 4x$

4. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

5. $y = x^2 \sin x$

6. $y = e^{\cos x}$

Найти дифференциал функции.

1. y arcsin(1 $-x^2)$ dy

$= \dfrac{-2dx}{\sqrt{2 - x^2}}$

Ответ:

2. $y = x^3 \ln(1 - x^2)$

$dy = (3x^2 \ln(1 - x^2) - \dfrac{2x^4}{1 - x^2})dx$

Найти дифференциал второго порядка функции.

1. $y = 2x3$

$d^2y = (1 \; x + 1 \;)dx^2$

$x^3 \quad 2 \quad 0$

Ответ:

2. $y = 5x + 5x^2$

$d^2y = (5^x \ln^2 5 + 6x)dx^2$

Ответ:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 77-92 (с. 207).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-11 (с. 176-177).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

4.1. Насколько изменится значение функции $y = 1 - x + x^2$ при изменении аргумента от 4 до 4,002?

4.2. Насколько изменится значение функции $y = x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$ при изменении аргумента от 3 до 3,001?

4.3. Дана функция $y = x^4 + x^3 - 2x$, найти y (1,004).

4.4. Дана функция $y = x^3 + x^2 - x$, найти y (0,998).

4.5. Используя общую формулу приближенных вычислений, вывести формулы для функций:

1) $ctg\,(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

2) $arctg\,(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

3) $ln(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

4.6. Найдите приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2, \Delta x = 0{,}001$. Какую погрешность допустим, если вычислим дифференциал вместо приращения?

4.7. Какова абсолютная погрешность округления:

а) с недостатком числа 8,3 до ближайшего целого числа;

б) с недостатком числа 9,6 до ближайшего целого числа;

в) с избытком числа 2,8 до ближайшего целого числа;

г) с избытком числа 7,1 до ближайшего целого числа.

д) с избытком числа 2,3 до ближайшего целого числа

4.8. С помощью формулы относительной погрешности выясните какое из двух измерений более точное: $(6{,}00 \pm 0{,}01)$м или $(345{,}0 \pm 0{,}5)$м

4.9. Расстояние между городами, измеренное по карте, равно (24,6±0,2) см. Определить фактическое расстояние между ними и определить абсолютную погрешность, если масштаб карты 1:2 500 000

4.10. Вычислите абсолютную и относительную погрешности, возникающие при замене приближенного числа $\pi \approx 3{,}1416$ более грубым приближением $\pi \approx 3{,}14$

Вычислите приближенное значение приращения функции с помощью дифференциала:

4.11. $y = 2x^2 - 5x - 3$ в точке $x_0 = 3$ при $\Delta x = 0{,}02$

4.12. $y = -x^3 + 4x + 1$ в точке $x_0 = 4$ при $\Delta x = 0{,}005$

4.13. $y = 3x^2 + 7x - 2$ в точке $x_0 = 8$ при $\Delta x = 0{,}03$

4.14. $y = \frac{1}{x^3} + 5$ в точке $x_0 = -2$ при $\Delta x = 0{,}016$

4.15. $y = 2x^2 - 6x + 3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 1$ к значению $x_2 = 1{,}001$.

4.16. $y = -5x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к значению $x_2 = 2{,}003$

Результат вычислений найден с помощью калькулятора. Найдите значения выражений с помощью формул приближенных вычислений, определите абсолютную погрешность вычислений:

4.17. $\sqrt{0{,}991} \approx 0{,}99489$

4.18. $\sqrt{1{,}008} \approx 1{,}00399$

4.19. $1{,}0004^{50} \approx 1{,}0202$

4.20. $\sqrt{0{,}994} \approx 0{,}996996$

4.21. $1{,}0003^{20} \approx 1{,}00602$

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 18 и еѐ актуальность. Функции двух переменных. Частные производные, частные и полный дифференциалы функции двух переменных.

Наиболее важным вопросом в теории функций является изучение характера изменения функции. Функция многих переменных может изменяться не единственным способом. Соответственно у функции имеются и несколько производных. Эти производные важны при изучении таких процессов и явлений природы, которые зачастую зависят от многих факторов.

2.Учебные цели:

-Освоить технику дифференцирования функции двух и более переменной;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- теоремы и формулы для нахождения производных функций;
- правила отыскания производных от функций, полученных из основных элементарных с помощью операций сложения, умножения, деления.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить частные и полные дифференциалы функций;
- использовать таблицу производных от основных элементарных функций для нахождения производных функций.
- решать задачи с использованием дифференциала функции.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение частных производных функции 2–х переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .
2. В чем заключается геометрический смысл частных производных функции двух переменных? 3. Найдите (по определению) частные производные функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$, $y = 0$.

4. Дайте определение частных производных функции 3–х переменных $f(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) .

4. Вид занятия: практическое занятие. **5. Продолжительность занятия:** 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

Вариант 1

1. Найдите ОДЗ функции $z = x - 1 + y + 2$

1. множество действительных чисел R; 2. множество пар действительных чисел R^2

3. множество пар точек на плоскости хоу, удовлетворяющих условиям: $x \geq 1, y \geq -2$;

4. множество пар точек на плоскости хоу, удовлетворяющих условиям: $x \leq 1, y \geq -2$

2. Найти частные производные функции двух переменных $z = x \ln y + \dfrac{y}{x}$

1. $z'_x = \dfrac{x+y}{xy}$, $z'_y = \dfrac{x+1}{xy}$; 2. $z'_x = \ln y + 1\ x$, $z'_y = \dfrac{x^2+1}{xy}$; 3. $z'_x = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$

3. Вычислить дифференциал функции z= x siny в точке P(-1;-π/2)

1. dz=dx; 2. dz=-dx; 3.dz=dx+dy; 4. dz=-dx-dy

4. Точка M(x_0;y_0) является точкой экстремума функции z=f(x;y), если в этой точке функция имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядка, $f'_x(x_0;y_0) = f'_y(x_0;y_0) = 0$ и выполняются условия

1. $f''_{xx}(x_0;y_0) f''_{yy}(x_0;y_0) - f''_{xy}(x_0;y_0) f''_{yx}(x_0;y_0) = 0$
2. $f''_{xx}(x_0;y_0) f''_{yy}(x_0;y_0) - f''_{xy}(x_0;y_0) f''_{yx}(x_0;y_0) < 0$
3. $f''_{xx}(x_0;y_0) f''_{yy}(x_0;y_0) - f''_{xy}(x_0;y_0) f''_{yx}(x_0;y_0) > 0$
4. $f''_{xx}(x_0;y_0) f''_{yy}(x_0;y_0) - f''_{xy}(x_0;y_0) f''_{yx}(x_0;y_0) \geq 0$

5. Точка M(x_0;y_0) называется точкой максимума функции z=f(x;y), если в окрестности точки M выполняется условие

1. $f(x_0;y_0) \leq f(x;y)$ 2. $f(x_0;y_0) \geq f(x;y)$
3. $f(x_0;y_0) > f(x;y)$
4. $f'(x_0;y_0) = 0$

Вариант 2

1. Областью определения функции двух переменных z=f(x;y) называется

1. множество всех точек плоскости Oxy;
2. множество всех точек пространства Oxyz, для которых это выражение имеет смысл;
3. множество всех точек пространства Oxyz;
4. множество всех точек плоскости Oxy, для которых это выражение имеет смысл

2. Найти частные производные функции двух переменных $z = x^y$

1. $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln y$
2. $z_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$
3. $z_x = yx^y$, $z'_y = x^y \ln x$
4. $z'_x = yx^{y+1}$, $z'_y = \frac{x^y}{\ln x}$

3. Вычислить дифференциал функции z=x^3y-2x+4y в точке P(1;1)

1) dz=dx
2) dz=dx+5dy
3) dz=-dx+5dy
4) dz=5dy

4. Точка M(x_0;y_0) является точкой максимума функции z=f(x;y), если в этой точке функция имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядка, $f'_x(x_0;y_0) = f'_y(x_0;y_0) = 0$ и выполняются условия

1. $f''_{xx}(x_0;y_0) f''_{yy}(x_0;y_0) - f''_{xy}(x_0;y_0) f''_{yx}(x_0;y_0) > 0$, $f''_{xx}(x_0;y_0) > 0$
2. $f''_{xx}(x_0;y_0) f''_{yy}(x_0;y_0) - f''_{xy}(x_0;y_0) f''_{yx}(x_0;y_0) > 0$, $f''_{xx}(x_0;y_0) < 0$
3. $f''_{xx}(x_0;y_0) f''_{yy}(x_0;y_0) - f''_{xy}(x_0;y_0) f''_{yx}(x_0;y_0) < 0$, $f''_{xx}(x_0;y_0) > 0$
4. $f''_{xx}(x_0;y_0) f''_{yy}(x_0;y_0) - f''_{xy}(x_0;y_0) f''_{yx}(x_0;y_0) < 0$, $f''_{xx}(x_0;y_0) < 0$

5. Для стационарной точки P(1,2) $z''_{xx} = -2$, $z''_{yy} = -5$, $z''_{xy} = 4$

1.точка не является точкой экстремума
2.точка является точкой минимума
3.точка является точкой максимума
4.спорный случай

Вариант 3

1. ОДЗ функции $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

1) множество действительных чисел R; 2) множество пар действительных чисел R^2 3) множество пар точек на плоскости оху, удовлетворяющих условиям: $x \neq y$;

4) множество пар точек на плоскости оху, удовлетворяющих условиям: $x^2 - y^2 > 0$

2. Найти частные производные функции двух переменных $z = \dfrac{y^2}{x}$

1) $z'_x = -\dfrac{y^2}{x^2}$, $z'_y = \dfrac{2y}{x}$

2) $z'_x = \dfrac{1}{x}$, $z'_y = 2y$

3) $z'_x = \dfrac{y^2}{x^2}$, $z'_y = \dfrac{2y}{x}$

4) $z'_x = -\dfrac{y}{x^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$

3. Вычислить дифференциал функции $z=5xy-x^2$ в точке P(3;2) 1) dz=dx ; 2) dz=dy ; 3) dz=dx+6dy; 4) dz=4dx+15dy

4. Точка $M(x_0;y_0)$ называется точкой минимума функции z=f(x;y), если в окрестности точки M выполняется условие

1) $f(x_0;y_0) < f(x;y)$; 2) $f(x_0;y_0) \geq f(x;y)$; 3) $f(x_0;y_0) > f(x;y)$; 4) $f'(x_0;y_0) = 0$

5. В точке $M(x_0;y_0)$ $z''_{xx} = 10$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = 1$

1)точка не является точкой экстремума; 2) точка является точкой минимума ; 3) точка является точкой максимума; 4) спорный случай

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Частный дифференциал по переменной x **функции** $u = f(x; y; z)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной x в предположении, что y и z – постоянные величины.

Обозначения частного дифференциала по x: $\frac{\partial u}{\partial x}dx$, или $\frac{\partial f}{\partial x}dx$

$\boldsymbol{d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx}$ – частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной x, **(4.3)**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x + 5y - 1\right)'_x \underset{y=const}{=} 10x^4 + 6xy - 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x + 5y - 1\right)'_y \underset{x=const}{=} 3x^2 + 2y + 5.$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}; z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$\boldsymbol{d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}dy}$ - частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной y, **(4.4)**

$\boldsymbol{d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}dz}$ - частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной z. **(4.5)**

$\boldsymbol{du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz}$ – полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ **(4.6)**

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.
Пример 1. z=2x5+3x2y+y2–4x+5y-1

$x \cdot y$

Пример 2. Найти частные производные функции $z = 3^{y \ \ x}$ в точке $A(x_0;y_0)$.
Находим частные производные:

$$\frac{dz}{dx} = 3^{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}\left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right) \cdot ln(3)$$

$$\frac{dz}{dy} = 3^{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}\left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) \cdot ln(3)$$

Найдем частные производные в точке A(1;1)

$$\frac{dz}{dx}_A = 2 \cdot ln(3)$$
$$\frac{dz}{dy}_A = -2 \cdot ln(3)$$

Находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)\ln(3)\right)'_x = 3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)^2 \ln^2(3) - \frac{2}{x^3}\left(3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}} y \ln(3)\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\ln(3)\right)'_y = \frac{2}{y^3}\left(3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}} x \ln(3)\right) + 3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)^2 \ln^2(3)$$

Найдем смешанные частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)\ln(3)\right)'_y = 3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\left(-\frac{1}{y^2}+x-2\right)\ln(3) + 3^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\ln^2(3)$$

Пример 3. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$.

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

Начнем с z'_x. Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом). Решаем:

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=} 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$
$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=} 4xy^3 + 12x^3$$

Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем всю функцию в скобки под штрих с подстрочным индексом.

Внимание, важно! Подстрочные индексы не теряем по ходу решения. Теперь z'_y. Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x считается константой (постоянным числом)

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y = 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$
$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

Шаг второй. Находим частные производные второго порядка. Их четыре. Для удобства я перепишу уже найденные частные производные первого порядка:

$$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$$
$$z'_y = 6x^2y^2 + 5$$

Сначала найдем смешанные производные:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$$

Берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$$

Находим вторую производную по «икс». Никаких изобретений, берем $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс» еще раз:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично:

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.
Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-41, 45-57 (с. 364-369).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-10 (с. 252-254).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.
Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.
Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 19 и еѐ актуальность. Формула Тейлора.
Разложение функций в степенной ряд используется при решении многих задач, так как дает возможность сложные для преобразований и вычислений функции заменить суммой более простых для этих целей степенных функций. **2.Учебные цели**:

- освоить технику разложения функции в ряд Тейлора;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- теоремы и формулы для нахождения производных функций;

- правила отыскания производных от функций, полученных из основных элементарных с помощью операций сложения, умножения, деления. Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**
- использовать таблицу производных от основных элементарных функций для нахождения производных функций.
- разлагать элементарные функций в ряд Тейлора.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1. Определение многочлена Тейлора.
2. Формула Тейлора с остаточным членом.
3. Примеры разложения функций по формуле Тейлора.
4. Формула Маклорена.
5. Разложение по формуле Маклорена элементарных функций.
6. Использование формулы Тейлора для выделения главной части функции для вычисления пределов.
7. Использование формулы Тейлора для вычисления приближенных значений функции.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Указать для $f(x)$ ряд Тейлора $y = \cos x$ функции

2. Указать разложение функции в ряд Маклорена

а). $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ б). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ в). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ г). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ д). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

3. Указать для функции $f(x)$ ряд Маклорена

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ б). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$ в). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^n$ г). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ д). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x)}{n!}x^n$

4. Указать разложение функции $y = e^x$ в ряд Маклорена .

а). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ б). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ в). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ г). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ д). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}$

5. Какие пределы можно брать для приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b \sqrt{1+x^3}\,dx$$

а) $(a,\ b)\in(0,\ 1)$; б) $(a,b)\in(-1,1)$ в) $(a,\ b)\in(-1,\ 0)$ г) $(a,\ b)\in(0,\ \infty)$ д) $(a,\ b)\in(-\infty,\ -0)$

6. Указать промежуток сходимости ряда Маклорена для функции $y=\sin x$

а) $x\in(-1,1)$; б) $x\in(-\infty,0)$; в) $x\in(0,\infty)$; г) $x\in[-1,1]$; д) $x\in(-\infty,\infty)$

7. Разложение какой функции в ряд Маклорена достаточно для разложения функции $y=\sin^2 x$

а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos 2x$; в) $y=\cos x$; г) $y=\sin\frac{x}{2}$; д) $y=\operatorname{tg} x$

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Формула Тейлора показывает поведение функции в окрестности некоторой точки. Формула Тейлора функции часто используется при доказательстве теорем в дифференциальном исчислении.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Частный случай ряда Тейлора при a=0 называется рядом Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Разложить функцию $f(x)=x\cos 3x$ в ряд Маклорена. Найти область сходимости полученного ряда. Известно, что

$$\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

.

В данном случае $\alpha = 3x$:

$$\cos 3x = 1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\frac{(3x)^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n(3x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Раскрываем наверху скобки:

$$\cos 3x = 1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Теперь умножаем обе части на «икс»:

$$x\cos 3x = x\cdot\left(1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)$$

В итоге искомое разложение функции в ряд:

$$y = x\cos 3x = x-\frac{3^2x^3}{2!}+\frac{3^4x^5}{4!}-\frac{3^6x^7}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}+\ldots$$

$$-\infty < x < +\infty$$

область сходимости полученного ряда:

Пример 2. Разложить функцию в ряд по степеням x. Найти область сходимости ряда. $f(x)=\ln(1-x^2)$

В таблице находим похожее разложение:

$$\ln(1+\alpha) = \alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n}+\ldots$$

Трюк прост – перепишем нашу функцию немного по-другому:

$$f(x)=\ln(1-x^2)=\ln(1+(-x^2))$$

$\alpha = -x^2$ и:

Таким образом,

$$\ln(1-x^2) = -x^2-\frac{(-x^2)^2}{2}+\frac{(-x^2)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(-x^2)^n}{n}+\ldots$$

Окончательно:

$$\ln(1-x^2) = -x^2-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\ldots-\frac{x^{2n}}{n}-\ldots$$

Теперь нужно определить область сходимости. Согласно таблице, ряд сходится при $|\alpha|<1$.

В данном случае $\alpha = -x^2$:

$$|-x^2|<1$$

Так как квадрат неотрицателен, то при раскрытии модуля знак «минус» просто испаряется:

$$x^2<1 \quad\Rightarrow\quad -1<x<1$$

Значения x=1, x= -1 не входят в область определения функции, но в «проблемной» точке сам ряд сходиться может. И поэтому лучше выполнить прямую подстановку концов интервала в найденное разложение.

При x=1 получаем:

$$-1^2-\frac{1^4}{2}-\frac{1^6}{3}-\ldots-\frac{1^{2n}}{n}-\ldots=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

– расходящийся гармонический ряд. И он же получается при $x=-1$. Таким образом, область сходимости ряда:

$-1<x<1$

Пример 3. Разложить функцию в ряд по степеням x. Найти область сходимости ряда.

$$f(x)=\frac{6x}{2-3x}$$

Смотрим в таблицу и находим наиболее похожее разложение:

$$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^n+\ldots$$

Во-первых, вверху должна быть единица, поэтому представляем нашу функцию в виде произведения:

$$f(x)=6x\cdot\frac{1}{2-3x}$$

Теперь нам нужно в знаменателе устроить $1-\alpha$, для этого выносим двойку за скобки:

$$f(x)=6x\cdot\frac{1}{2\left(1-\frac{3}{2}x\right)}$$

И сокращаем на два:

$$f(x)=3x\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)}$$

В данном случае $\alpha=\frac{3}{2}x$, таким образом:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)}=1+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}x\right)^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^3+\ldots+\left(\frac{3}{2}x\right)^n+\ldots=$$

$$=1+\frac{3}{2}x+\frac{3^2x^2}{2^2}+\frac{3^3x^3}{2^3}+\ldots+\frac{3^nx^n}{2^n}+\ldots$$

В итоге искомое разложение:

$$f(x)=\frac{6x}{2-3x}=3x\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)}=3x\cdot\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3^2x^2}{2^2}+\frac{3^3x^3}{2^3}+\ldots+\frac{3^nx^n}{2^n}+\ldots\right)=$$

$$=3x+\frac{3^2x^2}{2}+\frac{3^3x^3}{2^2}+\frac{3^4x^4}{2^3}+\ldots+\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^n}+\ldots$$

Определим область сходимости ряда. Можно пойти длинным и надежным путем и использовать признак Даламбера для полученного степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^n}$, т.е. найти интервал сходимости и т.д. Но можно поступить проще. В таблице указано, что биномиальный ряд

$\alpha = \frac{3}{2}x$, поэтому: $-1 < \frac{3}{2}x <$ сходится при 1 1. В данном случае 1. Умножаем все части неравенства на $\frac{2}{3}$:

$-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$

– интервал сходимости полученного ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} x^{n+1}}{2^n}$$

Что же происходит с рядом на концах интервала? При $x = \frac{2}{3}$ 1 – данный ряд

получаем: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{2^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ расходится, т. к. не выполнен необходимый признак сходимости, и при:

$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{2^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}$ расходится по той же причине. Таким образом, область сходимости полученного ряда: $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 94-102 (с. 208).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 12-18 (с. 176-177).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приёмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 20 и eѐ актуальность. Неопределенный интеграл.

Основные способы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, метод подстановки. Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции f(x) найти такую функцию F(x), производная которой была бы равна функции f(x), то есть $F'(x) = f(x)$. Восстановление функции по известной производной этой функции – одна из основных задач интегрального исчисления.

2.Учебные цели:

-- получение навыков нахождения неопределенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение неопределенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения неопределенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие первообразной функции.
2)Понятие неопределенного интеграла.
3)Свойства неопределенного интеграла.
4)Таблица основных интегралов.
5)Непосредственное интегрирование неопределенного интеграла.
6)Метод подстановки для нахождения неопределенного интеграла.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

Тестовые задания. 1 уровень

Выберите правильный ответ:

1. $\int \sin 3x\,dx$ равен

1. $\cos 3x + c$; 2. $\frac{1}{3}\cos 3x + c$; 3. $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$; 4. $-\cos 3x + c$; 5. $-\frac{1}{3}\cos x + c$

2. Производная от неопределенного интеграла равна

1.подынтегральной функции; 2.константе с; 3.подынтегральному выражению; 4.единице;
5.первообразной подынтегральной функции.

3. Интеграл от дифференциала первообразной равен

1.константе с; 2.подынтегральной функции; 3.подынтегральному выражению; 4.самой первообразной и дополнительному слагаемому С; 5. константе С; 6. 0.

4. $\int 4x^3dx$ равен

1. $12x^2 + c$; 2. $4x^2 + c$; 3. $x^2 + c$; 4. $x^4 + c$; 5. $12x^4 + c$

5. $\int \frac{dx}{x+1}$ равен

1. $(x+1)^2 + c$; 2. $\ln|x+1| + c$; 3. $\ln x + c$; 4. $\frac{1}{(x+1)^2} + c$; 5. $(x+1)^3 + c$

6. Определить множество первообразных для $f(x) = 3x^2$

1. $6x + c$; 2. $2x + c$; 3. $x^3 + c$; 4. $x^2 + c$

7. Дифференциал от неопределенного интеграла равен

1.подынтегральной функции; 2.константе с; 3.подынтегральному выражению; 4.единице; 5.первообразной подынтегральной функции.

8.$\int e^{2x}dx$ равен

1.$e^{2x}+c$; 2. $\frac{1}{2}e^{2x}+c$; 3. $2e^{2x}+c$; 4.$e^{x}+c$; 5. $2e^{x}+c$

9.Определить множество первообразных для $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$

1. 2arcsin$x+c$; 2. $arctgx+c$; 3.arcsin$x+c$; 4.2arctgx+c; 5.2arcctgx+c

10. Интеграл $\int$ lnxdx/ x равен

1. x+c; 2. ln|x|+c; 3. x^2+c; 4. 0.5ln|x|+c; 5. 0.5ln^2x+c Ответы на тесты:

1.3, 2.1, 3.4, 4.4, 5.3, 6.3, 7.3, 8.2, 9.4, 10.5.

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Интеграл, который вычисляется способом непосредственного интегрирования

а) $\int x\sin xdx$; б) $\int xe^x dx$; в) $\int x^2(x+1)dx$; г) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; д) $\int$ lnxdx

2. Интеграл, который можно вычислить только подстановкой

а) $\int$ xcosxdx ; б) $\int$ lnxdx ; в) $\int$ xdx ; г) $\int$ dx; д) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$

3. Интеграл, который можно вычислить только способом интегрирования по частям.

а) $\int (x+1)dx$; б) $\int$ sin2xdx; в) $\int$ 3dx; г) $\int$ xsinxdx; д) $\int 3x^2dx$

4. Производная от неопределенного интеграла равна

а) подынтегральной функции; б) константе С; в) подынтегральному выражению

г) единице; д) первообразной подынтегральной функции

5. Интеграл $\int$ sin2xdx равен

а) cosx+c; б) cos2x+c; в) -0.5cos2x+c; г) -cos2x+c; д) -cosx+c

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют первообразной. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка справедливо равенство $F'(x)=f(x)$. Например, функция $F(x)=x^2$ есть первообразная функции $f(x)=2x$. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$, где $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования.

Таким образом, если $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то $\int f(x)dx=F(x)+C$, где C - любое действительное число. Так, пользуясь определением неопределенного интеграла, можно записать: $\int 2xdx = x^2 + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$ и т.д.

Таблица основных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad \int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Основные свойства неопределенного интеграла 1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$(\int f(x)dx)' = f(x)$.

2. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно вынести за знак интеграла, т.е.

$\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, где m - постоянная величина, не равная нулю. 3. Интеграл от алгебраической функций равна алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.

$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

5. Неопределенный интеграл от дифференциала (производной) некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ или $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Найти интеграл $\int x^4 dx$.

Решение. Применим формулу I

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

Проверка: $d(\frac{1}{5}x^5 + C) = \frac{1}{5}\cdot 5x^4 dx = x^4 dx$. Получили подынтегральное выражение, следовательно, интеграл найден верно.

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx$.

Решение. Применяя формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и формулу V, получим

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x}dx = 2\int \sin x dx = -2\cos x + C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл способом подстановки $\int \sin(4-7x)dx$.

Решение. Введем новую переменную $t = 4 - 7x$. Отсюда $dt = d(4-7x) = -7dx$. Тогда $dx = -\frac{1}{7}dt$.

Подставляя в интеграл, имеем

$$\int \sin(4-7x)\,dx = \begin{matrix} t=4-7x \\ dt=-7dx \end{matrix} = \int \sin(-\frac{1}{7})\,dt = -\frac{1}{7}\int \sin t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{7}\cdot(-\cos t)+C = \frac{1}{7}\cos t + C$$

Верsuccessfully: Вернемся к переменной x : $\int \sin(4-7x)dx = \frac{1}{7}\cos(4-7x) + C$.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. Найти интеграл

1. $\int e^{3\cos x}\sin x\,dx$
2. $\int \sin^4 x \cos x\,dx$
3. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$
4. $\int \sqrt[3]{1-6x^5}\,x^4 dx$

$\int \sqrt{1+4\sin x}\cos x\,dx$

$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx;$

$\int \frac{t^2 dt}{(1+2t^3)^2};$

Вычислить интеграл способом непосредственного интегрирования.

$\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx$, Ответ: $-2\cos x + c$

$\int \frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x}dx$, Ответ: $x+4\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+c$

3. $\int (2+x)(1-x^2)dx$, Ответ: $2x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} +$

$\int (\frac{2}{x}+3\cos x)dx$, Ответ: $2\ln|x| + 3\sin x + c$

5. $\int (x^5+6^x)dx$, Ответ: $\frac{x^6}{6} + \frac{6^x}{\ln 6} + c$

$\int (\frac{1+x}{x})^2 dx$, Ответ: $-\frac{1}{x} + 2\ln|x| + x + c$

Вычислить интеграл подстановкой.

$\int \sqrt{x-2}\,dx$, Ответ: $\frac{2(x-2)\sqrt{x-2}}{3} + c$

$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$, Ответ: $\sqrt{x^2+3}+c$

3. $\int \sin x \cos^2 x\,dx$, Ответ: $-\frac{\cos^3 x}{3} + c$

$\int e^{\sin x}\cos dx$, Ответ: $e^{\sin x} + c$

$\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$, Ответ: $\frac{tg^2 x}{2} + c$

6. $\int \sin 3x\,dx$, Ответ: $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$

7. $\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx$, Ответ: $\frac{2}{9}(x^3-2)\sqrt{x^3-2}+c$

5.

6.

7)

1.

2.

c

4. (

6. (

1.

2.

4.

5.

8. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

9. $\int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$

Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-68 (с. 270-274).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-2 (с. 207-208).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.
Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.
Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 21 и еѐ актуальность. Метод интегрирования по частям.

Среди всех элементарных методов интегрирования метод интегрирования по частям занимает место не только самого трудного, но и самого эффективного. В связи с этим обстоятельством метод интегрирования по частям актуален при решении ряда современных физических и технических задач.

2. Учебные цели:

- усвоить интегрирование по частям на уровне знаний и умений решать типовые задачи, закрепить метод интегрирования с помощью замены переменной.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение неопределенного интеграла;
- **формулу для нахождения неопределенного интеграла методом взятия по частям.**

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Замена переменной в неопределенном интеграле.
2. Метод интегрирования по частям неопределенного интеграла.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1. сущность метода подстановки, формула метода замены переменной и следствия из неѐ, схема метода подстановки;
2. вычисление неопределенного интеграла от тригонометрических функций; 3. вычисление неопределенного интеграла с дробной функцией.

Вопросы для самоизучения:

1. вычисление неопределенного интеграла вида $\int f\,u\,x\,{}' \; u\,x\,dx$;
2. вычисление неопределенного интеграла с непосредственным применением формул тригонометрии;
3. вычисление неопределенного интеграла смешанного вида (иррациональная функция с тригонометрической).

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Завершы фразу:

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы и обратные тригонометрические функции, бывает удобным воспользоваться… 2. Допишите формулу: $\int vdu =$

3. Найди правильный ответ (обведи соответствующую цифру), $\int 2x\cos 2x dx = x \quad 1$

(1) $\frac{\sin 2x}{2} \quad \frac{\cos 2x}{4} \quad c$

$+ \; -$

(2) $x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$

(3) $x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$ 1

(4) $-\frac{\ }{2}\sin 2x + \frac{\ }{2}\cos 2x + c$

1) $\int (x^2 + 3x + 1)\ln x\,dx$

2) $\int x^3 e^{-x}dx$

3) $\int (x^3 + 1)\cos x\,dx$

Типовые задачи.
Найти интегралы

1) $\int \arccos x\,dx$

2) $\int x\ln x\,dx$, Ответ: $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

3) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

4) $\int x\ln(x+1)dx$

5) $\int (6x - 4)\sin 4x\,dx$

6) $\int x e^{2x} dx$

7) $\int (x+1)e^{-x}dx$

8) $\int (x^2 - 2x + 3)\cos x\,dx$

9) $\int \sqrt{x}\, e^{5x^2}dx$

10) $1 - x^2\,dx$

Задания для самостоятельной работы

Задания	Ответы
1. $\int(2x+3)e^{5x}dx$	$\frac{1}{5}(2x+3)e^{5x} - \frac{2}{25}e^{5x} + C$
2. $\int(2-4x)\sin 3x\,dx$	$-\frac{1}{3}(2-4x)\cos 3x - \frac{4}{9}\sin 3x + C$
3. $\int(9x-7)\cos 10x\,dx$	$\frac{1}{10}(9x-7)\sin 10x + \frac{9}{100}\cos 10x + C$
4. $\int x e^{-3x}dx$	$-\frac{1}{3}e^{-3x}\cdot x - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$
5. $\int(7+4x)\sin 6x\,dx$	$\frac{1}{6}(7+4x)\cos 6x + \frac{1}{9}\sin 6x + C$
6. $\int(2x-11)\cos 20x\,dx$	$\frac{1}{20}(2x-11)\sin 20x + \frac{1}{200}\cos 20x + C$
7. $\int(7-6x)e^{8x}dx$	$\frac{1}{8}(7-6x)e^{8x} + \frac{3}{32}e^{8x} + C$
8. $\int x\cos 4x\,dx$	$\frac{x}{4}\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$

9. $\int (4+6x)\sin\frac{4}{3}x\,dx$	$-\frac{3}{4}(4+6x)\cos\frac{4}{3}x+\frac{27}{8}\sin\frac{4}{3}x+C$
10. $3\int (x-2)e^{6x}dx$	$\frac{1}{6}(3-7x^2)e^{6x}+\frac{7}{18}(x-1)e^{6x}+C$

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

$\int udv = uv - \int vdu$ - формула интегрирования по частям.

Эта формула применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функции, например,

$$\int x e^{2x} dx;\ \int x^3 \ln x dx;\ \int (x+1)\sin x dx .$$

Чтобы воспользоваться формулой интегрирования по частям, u и dv выбираем в подынтегральном выражении, du и v получаем по формулам:

$$du = u'dx\ ;\ v = \int dv$$

Большую часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, можно разбить на три группы.

1. интегралы вида $\int P(x)\, arctgx dx$, $\int P(x)\, arcctgx dx$, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x\, dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, где P(x)-многочлен. Для их вычисления следует положить u равным одной из указанных выше функции, а dv= P(x)dx.

2. интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kx dx, \int P(x)\cos kx dx$, где P(x)- многочлен, а k–некоторое число. Для их вычисления следует положить u=P(x), а $dv=e^{kx}dx$, dv=sinkxdx, dv=coskxdx соответственно.

3. интегралы $\int e^{ax}\cos bx dx, \int e^{ax}\sin bx dx$, где a и b некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл $\int xe^x dx$

Решение. $\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = e^x dx; \\ du = dx, & v = e^x \end{vmatrix} = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C.$

Пример 2. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл $\int x^2 \sin x dx$

Решение. Имеем

$$\int x^2 \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x dx.$$

$$= \quad = \quad = \quad = \quad = - \quad = - \quad : \quad + \int$$

Для нахождения полученного в правой части равенства интеграла снова интегрируем по частям: $\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C$

(см. решение примера 1). В результате получаем окончательный ответ: $\int x^2 \cdot \sin x dx = x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Контрольная работа. Вариант 1

а) $\int (2e^x - 3\cos x + 3x^5)\,dx$; б) $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5x^3}{x^2}dx$; в) $\int \frac{5dx}{2(4 + 25x^2)}$; г) $\int 2x\sqrt{x^2 - 7}dx$

д) $\int \cos x(1 - \sin x)^3 dx$; е) $\int x(x - 5)\sin 4x dx$; ж) $\int (x^2 - 1)e^{-2x}dx$; з) $\int (3x - x^2)\ln 2x dx$

Вариант № 2

а) $\int (2\sin x - 4e^x + 5x^7)\,dx$; б) $\int \frac{2x^4 - 5x + 6x^7}{x}dx$; в) $\int 2\cos\frac{2 - 4x}{3}dx$; г) $\int 3x\sqrt{x^2 - 4}dx$

д) $\int \cos x(\sin x - 3)dx$; е) $\int (1 - 3x^2)\cos(x + 1)dx$; ж) $\int (3 + 2x^2)e^{\frac{x}{3}}dx$; з) $\int (4 + 5x^3)\ln(1 - x)dx$

Вариант № 3

$\int (4x^7 - 5e^x + 8\cos x)\,dx$; б) $\int \frac{7x^4 - 11x^2 + 9x^3}{11x^2}dx$; в) $\int \frac{2dx}{\cos^2\left(1 - \frac{4}{7}x\right)}$; г) $\int 4x\sqrt{2 + x^2}dx$;

д) $\int \sin x(2 - \cos x)^2 dx$; е) $\int x(2x + 1)\sin(1 - 2x)dx$; ж) $\int (4x - 5)e^{x+1}dx$; з) $\int (5x - 4x^2)\ln(3x + 1)dx$ а)

Типовые задачи

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 85-95 (с. 276).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 3-11 (с. 208-209).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Вычислить интеграл способом интегрирования по частям.

1. $\int x\cos 3x dx$

Ответ: $\frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c$

2. $\int x^2\sin 2x dx$

Ответ: $-\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

3. $\int arctgx dx$

Ответ: $x\,arctgx - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$

4. $\int \ln x dx$

Ответ: $x\ln x - x + c$

Задания для самостоятельной работы

Задания	Ответы
1. $\int \arcsin x dx$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
2. $\int \operatorname{arctg} 3x\, dx$	$x \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}\ln\ 1+9x^2\ \ +C$
3. $\int \ln 5x dx$	$x\ln 5x - x + C$
4. $\int \arccos 3x dx$	$x\arccos 3x - \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + C$
5. $\int x \cdot \ln 2x dx$	$\frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{1}{4}x^2 + C$
6. $\int \arcsin 4x dx$	$x\arcsin 4x + \frac{1}{4}\sqrt{1-16x} + C$
7. $\int (2-3x)\ln x dx$	$\left(2x - \frac{3}{2}x^2\right)\ln x - 2x + \frac{3}{4}x^2 + C$
8. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$	$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$
9. $\int x^2 \ln x dx$	$\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$
10. $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$	$x^2\ 1 + \operatorname{arctg} x\ x\ C$

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 22 иеѐ актуальность. Интегрирование дробных функций.

Далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

2. Учебные цели:

- усвоить интегрирование по частям на уровне знаний и умений решать типовые задачи, закрепить метод интегрирования с помощью замены переменной.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение понятия первообразной, неопределенного интеграла;
- свойства неопределенного интеграла
- таблицу интегралов;
- методы интегрирования;
- область применения неопределенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции, неопределенный интеграл;
- применять метод непосредственного интегрирования и замены переменной.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1.Какие функции называются рациональными? Приведите примеры рациональных функций одной и двух переменных.

2. Какие рациональные функции называются целыми, какие — дробными? Приведите примеры целых и дробных рациональных функций.

3. Какие рациональные функции называются правильными, какие — неправильными? Приведите примеры правильных и неправильных рациональных функций.

4. В каком виде можно представить неправильную рациональную функцию?

5. Как выделить целую часть у неправильной рациональной функции?

6. Сформулируйте теорему о разложении правильной рациональной функции на элементарные дроби.

7. Какие слагаемые в разложении правильной рациональной функции $Q_m(x)/Q_n(x)$ на элементарные дроби соответствуют каждому действительному нулю a кратности k знаменателя $Q_n(x)$?

8. Какие слагаемые в разложении правильной рациональной функции $Q_m(x)/Q_n(x)$ на элементарные дроби соответствуют каждой паре комплексно сопряженных нулей кратности k знаменателя $Q_n(x)$ 9. В чем заключается метод неопределенных коэффициентов для разложения правильной рациональной функции на элементарные дроби? **4. Вид занятия**: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Интегрирование рациональных дробей

Дробно-рациональной функцией (рациональной дробью) $R(x)$ называется отношение двух многочленов с действительными коэффициентами, т.е. $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где m, n - степени многочленов.

Если $m < n$, то дробь правильная.

Если $m \geq n$, то дробь неправильная.

Всякую неправильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной остаточной дроби $\frac{P_s(x)}{Q_n(x)}$, $s < n$, т.е. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{P_s(x)}{Q_n(x)}$.

Рассмотрим общее правило интегрирования рациональных дробей.

Чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо:

а) Если дробь неправильная, то выделить целую часть и остаточную правильную рациональную дробь;

б) разложить знаменатель правильной рациональной дроби на линейные и квадратичные множители (если это необходимо), при этом возможны следующие типы множителей:

$(x - a)$ - линейный, $(x - a)^k$ - линейный кратности «k», $x^2 + px + q, D < 0$ - квадратичный;

в) разложить правильную дробь на сумму простейших, при этом:

множителю $(x - a)$ соответствует простейшая рациональная дробь I типа $\frac{A}{x - a}$

множителю $x\ \ a$ соответствует разложение (сумма дробей I и II типов) $A1\ \ A2\ \ Ak\ \ x\ a$

$x\ a^2 K\ x\ a_k$

множителю $x^2\ \ px\ \ q$ соответствует дробь III типа $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

г) привести обе части равенства к общему знаменателю и приравнять числители;

д) найти неопределенные коэффициенты;

е) проинтегрировать каждую из полученных дробей и выделенную целую часть.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Представить рациональную дробь $x3\ \ x\ \ 2$ в виде суммы многочлена и правильной дроби $x^2\ \ 7x\ \ 12$

$\frac{x3\ x\ 2}{x^2\ 7x\ 12}$ - неправильная рациональная дробь, т.к. степень числителя ($m3$) больше степени знаменателя (n 2).

Разделим числитель на знаменатель. При этом многочлены запишем по убыванию степеней, а степени отсутствующие в явном виде с нулевыми коэффициентами. $x^3\ 0\ x^2 x\ 2\ x^3$

$7x^2\ \ 12$ | $x^3\ \ 7x^2\ \ 12x\ x\ 7$ - целая часть

$7x^2\ 11x\ 2$

$7x^2\ 49x\ 84$

$38x\ 82$ - остаток тогда $xx^3\ x\ 2\ x$

7 238x7x8212 .

2 $7x$ 12 x

Интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию соответствующих простейших дробей. Простейшими дробями называются дроби следующих 3-х типов: $\frac{A}{x-a}$ - I тип

$\frac{A}{(x-a)^n}$, где $n>1$, $n\in Z$ - II тип

$\frac{Mx+N}{x^2+px+g}$, где дискриминант знаменателя отрицательный, - III тип

Рассмотрим интегрирование простейших рациональных дробей на примерах. **Пример 2.** Интегрирование простейшей рациональной дроби I типа.

$$+ \quad + \quad = \left(- \quad \right)\left(- \quad \right)$$

$\int\frac{4dx}{1-2x} = 4\int\frac{dx}{1-2x} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ln|1-2x| + C = C - 2\ln|1-2x|.$

Пример 3. Интегрирование простейшей рациональной дроби II типа.

$\int\frac{2}{(x+3)^2}dx = 2\int(x+3)^{-2}dx = 2\cdot\frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1} + C = 2\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C = C - \frac{2}{x+3}.$

Пример 4. Интегрирование простейшей рациональной дроби III типа.

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx$$

1. Найдем дискриминант знаменателя $x^2+2x+10$

$$D = 2^2 - 4\cdot1\cdot10 = -36 < 0 \Rightarrow \text{дробь III типа.}$$

2. Выделим в знаменателе полный квадрат.

$$x^2+2x+10 = (x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2) - 1^2 + 10 = (x+1)^2 +$$

3. Введем замену: основание выделенного квадрата принимаем за новую переменную.

$\int\frac{3x+5}{(x+1)^2+9}dx = \left|\begin{matrix}x+1=t\\ dx=dt\\ x=t-1\end{matrix}\right| = \int\frac{3(t-1)+5}{t^2+9}dt = \int\frac{3t+2}{t^2+9}dt = 3\int\frac{tdt}{t^2+9} + 2\int\frac{dt}{t^2+9} =$ I-й интеграл берется методом замены, а II-й – табличный

$= \left|\begin{matrix}t^2+9=z\\ 2tdt=dz\\ tdt=\frac{dz}{2}\end{matrix}\right| + 2\int\frac{dt}{t^2+3^2} = 3\int\frac{\frac{dz}{2}}{z} + 2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + c =$

4. Возвращаемся к прежним переменным

$= \frac{3}{2}\ln|z| + \frac{2}{3}arctg\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln|t^2+9| + \frac{2}{3}arctg\frac{t}{3} + c$

$= \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+10| + \frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3} + c$

Методы нахождения неопределенных коэффициентов рассмотрим на примерах.

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{3x+8}{x^2+3x-10}dx$

$\frac{3x \quad 8}{x^2 \quad 3x \quad 10}$ - правильная рациональная дробь.

Разложим знаменатель $x^2+3x-10$ на множители по формуле $ax^2 \quad bx \quad c \quad a\,x \quad x_1 \quad x \quad x_2$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена.

$x^2 \quad 3x \quad 10 \quad 0$

$+ \quad - \quad =$

$x_1 = -5, x_2 = 2,$

тогда $x^2\ 3x\ 10\ x\ 5\ (x\ 2$.

Представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей. Линейным множителям x 5 и x 2 знаменателя данной дроби соответствуют простейшие рациональные дроби вида

A и B. $x\ 5$

x 2

Тогда $3x$ 8 A B . x^2 $3x$ 10 x 5 x

2

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$3x\ 8\ \ 3x\ 8\ x^2\ 3x\ 10\ \ x\ 5\ x\ 2$ A 2 B x 5

т.к. знаменатели равны, то 5 2 приравняем числители:

$3x\ 8\ A\ x\ 2\ B\ x\ 5$.

Коэффициенты A и B можно найти одним из способов. I способ (метод сравнивания коэффициентов).

$3x\ 8\ A\ x\ 2\ B\ x\ 5$

$3x+8=Ax-2A+Bx+5B$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 3=A+B \quad (\cdot 2) \\ x^0 & 8=-2A+5B \end{array} \quad \begin{cases} 6=2A+2B \\ 8=-2A+5B \end{cases}$$

$14=\quad 7B\Rightarrow B=2$

Тогда 1 уравнение системы имеет вид $3=A+2\Rightarrow A=1$. Таким образом $A\quad 1,B\quad 2$.

II способ (метод частных решений).

$3x+8=A(x-2)+B(x+5)$

Пусть $x=2$, тогда $3\cdot 2+8=A(2-2)+B(2+5)$

$14=7B$

$2=B$

Пусть $x=-5$, тогда $3\cdot(-5)+8=A(-5-2)+B(-5+5)$

$-7=-7A$

$1=A$

Таким образом $A=1, B=2$.

Тогда

$$\frac{3x+8}{x^2+3x-10}=\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-2}$$

Проинтегрируем

$$\int\frac{3x+8}{x^2+3x-10}dx=\int\left(\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-2}\right)dx=\int\frac{dx}{x+5}+2\int\frac{dx}{x-2}=\ln|x+5|+2\ln|x-\quad|+$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx$

2 C.

$\dfrac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}$ - неправильная рациональная дробь.

Представим дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби (решение см. пример 4.1)

Тогда, $\displaystyle\int\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx=\int\left(x+7+\frac{38x-83}{x^2-7x+12}\right)dx$

Разложим знаменатель правильной дроби на множители:

$x^2-7x+12=0\Rightarrow x=4;\ x=3\Rightarrow x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$

$\dfrac{38x-82}{x^2-7x+12}=\dfrac{38x-82}{(x-4)(x-3)}=\dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{x-3}$

$\dfrac{38x-82}{(x-4)(x-3)}=\dfrac{A(x-3)+B(x-4)}{(x-4)(x-3)}\Rightarrow 38x-82=(A+B)x+(-3A-4B)$

$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 38=A+B \\ x^0 & -82=-3A-4B \end{array}\right\}$ Решив систему, получаем $A=70,\ B=-32$

$\dfrac{38x-82}{x^2-7x+12}=\dfrac{70}{x-4}-\dfrac{32}{x-3}$

$\displaystyle\int\left(x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}\right)dx=\int\left(x+7+\frac{70}{x-4}-\frac{32}{x-3}\right)dx=$

$\displaystyle=\int xdx+7\int dx+70\int\frac{dx}{x-4}-32\int\frac{dx}{x-3}=\frac{x^2}{2}+7x+70\ln|x-4|-32\ln|x-3|+c.$

Пример 7. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$

- $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ правильная рациональная дробь, так как степень числителя – 2, а знаменателя – 3.

Знаменатель уже разложен на линейные множители, причем множитель x 1 имеет кратность 2.

$\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$

$\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{A(x^2-1)+B(x-1)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}\Rightarrow$

$x^2+1=(A+C)x^2+(B+2C)x+(-A-B+C)$

$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=1 \\ x^1 & B+2C=0 \\ x^0 & -A-B+C=1 \end{array}\right\}\Rightarrow A=\dfrac{1}{2};B=-1;C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}$

$\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int(x+1)^{-2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\left(\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right)+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c=\frac{1}{2}\ln|(x+1)(x-1)|+\frac{1}{x+1}+c=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+c.$

Пример 8

Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2-9}dx.$

Решение.

Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{2x+3}{x^2-9}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

Сгруппируем слагаемые и приравняем коэффициенты при членах с одинаковыми степенями:

$$A(x+3)+B(x-3)=2x+3,\ \Rightarrow Ax+3A+Bx-3B=2x+3,\ \Rightarrow\ (A+B)x+3A-3B=2x+3.$$

Следовательно

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A-3B=3 \end{cases},\ \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{3}{2} \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{2x+3}{x^2-9}=\frac{\frac{3}{2}}{x-3}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Теперь легко вычислить исходный интеграл

$$\int\frac{2x+3}{x^2-9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{3}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-3)^2(x+3)\right|+C.$$

Пример 9

Вычислить интеграл $\int\frac{x^2-2}{x+1}dx.$

Решение.

Сначала выделим правильную рациональную дробь, разделив числитель на знаменатель.

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}\quad\int\frac{dx}{x^2+4x+4+4}\quad\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}\quad\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2}\quad\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}+C.$$

Вычислить интеграл $\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$$\frac{x^2-2}{x+1}=x-1-\frac{1}{x+1}.$$

Получаем

$$\int\frac{x^2-2}{x+1}dx=\int\left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int xdx-\int dx-\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}-x-\ln|x+1|+C.$$

Пример 10

Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$

Решение

Пример 11

Решение.

Разложим подынтегральное выражение на сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x^2dx}{x-1\quad x-2\quad x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Определим коэффициенты:

$$A\ x-2\quad x-3\ +B\ x-1\quad x-3\ +C\ x-1\quad x-2\ =x^2,$$

$$Ax^2-2Ax-3Ax+6A+Bx^2-Bx-3Bx+3B+Cx^2-Cx-2Cx+2C=x^2,$$

$$A+B+C\ x^2-\ 5A+4B+3C\ x+6A+3B+2C=x^2.$$

Следовательно,

$$\begin{cases}A+B+C=1\\5A+4B+3C=0,\\6A+3B+2C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\B=-4.\\C=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

Получаем $\dfrac{x^2dx}{x-1\quad x-2\quad x-3}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}-\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{\frac{9}{2}}{x-3}.$

Интеграл, соответственно, равен

$$\int\frac{x^2dx}{x-1\quad x-2\quad x-3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-4\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-4\ln|x-2|+\frac{9}{2}\ln|x-3|+C.$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задания	Ответы
1. $\int\frac{3}{4x-5}dx$	$\frac{3}{4}\ln x\ 5\ C$
2. dx [redacted] $3\quad 7$	$C\ \frac{1}{6(x-3)^6}$
3. dx [redacted] $^2+4x+8$	$\frac{1}{2}\ arctg\ \frac{x+2}{2}+C$
4. [redacted] $3x-\ 5\ dx$ / x^2+4x+5	$\frac{3}{2}\ln\ x^2+4x+11 arctg(x+2)+C$ 5
5. $\int\frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx$	$\frac{1}{2}\ln x-1+\ln 2x+3+C$
6. $3x+8\quad 2\ dx$ / [redacted] $^3+4x^2+4x$	$2\ln x+\ln x+2+\frac{10}{x+2}+C$
7. [redacted] $2x\ 1\quad dx$ / x^2-3x+2	$3\ln x\ 2-\ln x-1+C$
8. $\int 2x3\_2x3x\ 1dx$ / x	$\frac{x}{2}+2x+\frac{2}{x-1}+\quad 2\quad C$

[redacted] x 1 [redacted] 2 [redacted] 2 [redacted] 9. $x2^{+}2 \quad dx$	$\frac{2}{3}\ln x - 2 + \frac{1}{3}\ln x + 1 + \frac{1}{x+1} + C$
10. $-x^3 2x\, 2 \quad dx$ [redacted] $x-1$ [redacted] ^{2} 1 [redacted]	1 + 1(2) 1 + $3arctgx$ $C \ln x$ $2x - 12$ 2

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 96-101 (с. 277).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы

1) Какие из дробей является правильными?

а) $\frac{(2x^6 - x)^3}{(x^4 + 4x - 1)^5}$; б) $\frac{x^3 + 1}{7x^2 - 9x + 1}$; в) $\frac{3^3 + x}{6x^5 - 5x + 3}$ г) $\frac{3x^4 - 6}{(2x^2 + x - 3)^2}$

2) Чему равен интеграл $\int \frac{1}{x^2 + px + q}$

$\sqrt{x^2 + \frac{p}{2}} \ln \left| \frac{x^2 + px + q}{q - \frac{p^2}{4}} \right| + C$; б) $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \operatorname{arctan} \frac{x + \frac{p}{2}}{q - \frac{p^2}{4}} + C$; в) $\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctan} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$;

$\left| \frac{\sqrt{x + \frac{p}{2}}}{q - \frac{p^2}{4}} \right| + C$

для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий. а)

г)ln

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. Тема занятия № 23 и её актуальность.

Интегрирование тригонометрических и простейших иррациональных функций. Актуальность темы занятия обусловлена необходимостью решения прикладных задач, связанных с интегрированием.

2. Учебные цели:

- научиться брать интегралы от тригонометрических и простейших иррациональных функций.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение понятия первообразной, неопределенного интеграла;
- свойства неопределенного интеграла
- таблицу интегралов;
- методы интегрирования;
- область применения неопределенного интеграла
- интегрирование простейших иррациональных функций;
- основные подстановки интегрирования простейших иррациональных функций.
- интегрирование тригонометрических функций.
- универсальные тригонометрические подстановки, формулы понижения степени, рекуррентные формулы.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции, неопределенный интеграл;
- применять метод непосредственного интегрирования и замены переменной;
- уметь интегрировать простейшие иррациональные функции.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. С помощью каких подстановок интегралы от тригонометрических функций удается рационализировать?
2. С помощью каких подстановок интегралы от иррациональных функций удается рационализировать?

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx \, ,$$

где m и n - целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применения формул понижения.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1 $\int \cos^5 x \cdot dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x \cdot dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot d(\sin x) = \sin x = t = \int (1-t^2)^2 \cdot$

$\int (1-2t^2+t^4)dt = t - 2\frac{t^3}{3} \to \frac{t^5}{5} \to C = \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

dt

$=$

Пример 2. $\int \sin^6 x \cdot dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-cox2x}{2}\right)^3 dx =$

$= \frac{1}{8}\int (1-3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)dx = \frac{1}{8}\int\left(1-3\cos 2x + 3\frac{1+co4x}{2} + (1-\sin^2 2x)\cos 2x\right)dx$

$\frac{1}{8}\left(x - 3\frac{\sin 2x}{2} + \frac{3}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\right) + C$.

$=$

Из приведенных примеров видно, что в случае, когда одна из степеней нечѐтная, удобно вводить новую переменную. Если же обе степени – четные, то удобно (возможно неоднократно) понижать степени, используя тригонометрические формулы.

Следующие интегралы вычисляются с помощью формул:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

Рассмотрим конкретный пример.

$$\int\sin 5x\cdot\cos x\cdot dx=\frac{1}{2}\int(\sin(5x-x)+\sin(5x+x))\cdot dx=$$

$$\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 6x)\cdot dx=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 4x}{4}+\frac{-\cos 6x}{6}\right)+$$

Интегрирование с помощью универсальной тригонометрической подстановки

Вычисление интегралов вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

$=$ C.

где R - рациональная функция, в общем виде приводится к интегрированию рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$tg\frac{x}{2}=t$.

Пример. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=($выразим подынтегральную функцию и дифференциал через функцию и дифференциал $tg\frac{x}{2})=\int\frac{dx}{2(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})-(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})+5(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})}$

$$\int\frac{1}{6\sin^2\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}dx=\int\frac{2d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{6tg^2\frac{x}{2}+4tg\frac{x}{2}\quad 4}=$$

$=$

$=$

(всё подготовлено к выполнению универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2}=t$)

$$= \int\frac{2dt}{6t^2+4t+4} = \int\frac{dt}{3t^2+2t+2} = \int\frac{\frac{1}{3}d\left(3t+\frac{1}{3}\right)}{\left(3t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}arctg\frac{3t+\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}+C =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

Пример: $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx = \int\frac{a(\sin x+2\cos x)+b(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}dx =$

(найдём неопределенные коэффициенты из системы уравнений:

$$\begin{matrix}\sin x|1=a-2b\\ \cos x|-1=2a+b\end{matrix} \rightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{5}\\ b=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

и получим два простых интеграла)

$$= \int\frac{-\frac{1}{5}(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}dx+\int\frac{-\frac{3}{5}(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}dx = -\frac{1}{5}\int dx-\frac{3}{5}\int\frac{d(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x} =$$

$$=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C$$

=

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. $\int\frac{1}{\sin^3 x}dx$, 2. $\int\frac{1}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}dx$, 3. $\int tg^5x\cdot dx$, 4. $\int ctg^6x\cdot dx$ 5. $\int\frac{1}{\sin^3 x}dx$, 6. $\int\frac{1}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}dx$, 7. $\int tg^5x\cdot dx$, 8. $\int ctg^6x\cdot dx$; 9. $\int\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot dx$, 10. $\int\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot dx$; 11. $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$, 12. $\int\frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$, 13. $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ $\int\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$, 15. $\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^4 x}dx$, 16. $\int\frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$; 17. $\int\frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}dx$,

18. $\int\frac{dx}{3+5ctgx}$, 19. $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx$, 20. $\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$; 21. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

22. $\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx$; 23. $\int\sin 2x\cos 4x\,dx$; 24. $\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$;

;

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М.
: Академия, 2005. - 611 с. № 102-105 (с. 277).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

1. Найти $\int \cos 2x \sin 5x\, dx$

а) $\frac{1}{4}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C$; б) $\frac{1}{4}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$; в) $\frac{1}{4}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$;

г) $-\cos 7x - \cos 3x + C$

2. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$

а) $6\left(\sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}\right) + c$ б) $6\left(\sqrt[6]{x} + arctg\sqrt[6]{x}\right) + c$; в) $3\left(\sqrt[6]{x} + arctg\sqrt[6]{x}\right) + c$;

$3\sqrt[6]{x} + 6\, arctg\sqrt[6]{x} + c$

3. Найти $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

а) $\sqrt{x+1}\cdot e^{-x} + c$; б) $2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + c$; в) $\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + c$; г) $2\left|\sqrt{x}+1\right| + c$

г)3 x

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. **Тема занятия № 24 и eѐ актуальность**. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции f(x) найти такую функцию F(x), производная которой была бы равна функции f(x), то есть $F'(x) = f(x)$. Восстановление функции по известной производной этой функции – одна из основных задач интегрального исчисления.

2. **Учебные цели**:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла
- решать некоторые задачи геометрии и физики с помощью определенного интеграла

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие определенного интеграла.
2)Свойства определенного интеграла.
3)Формула Ньютона-Лейбница.
4)Несобственные интегралы.
5)Приближенное вычисление определенных интегралов. Формула трапеций.

4. **Вид занятия**: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Выберите среди приведенных выражений верно написанные свойства определенного интеграла, если f(x) и g(x) – интегрируемы на [a; b], [a; c], [c; b] k=const.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$;

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a \frac{1}{f(x)}dx$; 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$.

3)

4) ;

5)

6)

2. Теорема о среднем значении определенного интеграла: если функция y=f(x) непрерывна на [a; b], то найдется хотя бы одна точка c є [a; b], в которой выполняется равенство 1)

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$; 2) $\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$;

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(c)}{b-a}$$;

$$\int_a^b f(x)dx = c(f(b)-f(a))$$.

3. Формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

3)

4)

справедлива, если

1) $F'(x) = f(x)$;

2) $F(x)$ – непрерывна на $[a;b]$; $F'(x) = f(x)$;

3) $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$; $F'(x) = f(x)$;

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

4)

4. Укажите верное соответствие между функцией и ее свойством. Замена переменной в определенном интеграле может быть выполнена по формуле

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, если $f(x)$, $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$

являются

Функция Свойство

$f(x)$; 1) непрерывная функция на $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(b)$ 1. ;

$\varphi(t)$; 2) непрерывная функция на $[a;b]$;

$\varphi'(t)$. 3) монотонная и непрерывная функция на $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(b)$.

2.

3.

5. Выберите верные утверждения

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$ -четная 1) ;

$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$,если $f(x)$-четная ;

2)

3) ;

4)

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$,если $f(x)$-нечетная

$\int_{-a} f(x)dx = 0$,если $f(x)$ нечетная
.

6. $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. Вычислить интеграл

Ответ введите целым числом:

7. Вычислить интеграл $\int_2^{11} 10x\sqrt{x-2}dx$.

Ответ введите целым числом:

8. Выберите верную запись формул интегрирования по частям в определенном интеграле

1) $\int_a^b u(x)du(x) = u(x)v(x) - \int_a^b v(x)du(x)$;

2) $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$;

3) $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v(x)du(x)$;

4) $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u(x)dx$.

9. $\int_1^e \ln xdx.$ Вычислить

Ответ введите целым числом:

10. Вычислить $\int_0^\pi x\cos xdx.$

Ответ введите целым числом с указанием знака (+,-) без пробела:

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия. **Определенный интеграл**

Если $F(x)$ + C - первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b)$ − $F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от x = a до x = b называется определенным интегралом и обозначается символом bb

$\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx$ = $F(b)$ − $F(a)$
aa

Основные свойства определенного интеграла

1.При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: ba $\int f(x)dx = -\int f(x)dx.$
ab

Это свойство позволяет рассматривать интегралы, в которых верхний предел меньше нижнего.

2.Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т.е. bb

$$\int kf(x)dx \to k\int f(x)dx,$$
aa

где k - постоянная величина.

3.Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т.е. $b \quad b \quad b$

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \pm (x)dx.$$
$a \qquad a \qquad a$

4. Если a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция $f(x)$ непрерывна, то

$bc \quad b \int f(x)dx = \int f(x)dx$
$$+\int f(x)dx.$$
$aa \qquad c$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

$- \quad = \frac{1}{20}$

№1. Найти $\int\limits^{2}(5x^4+2x-8)dx$.

Решение. $\int\limits_1^2(5x^4+2x-8)dx=\int\limits_1^2 5x^4dx+\int\limits_1^2 2xdx-\int\limits^2 8dx=$

$=x^5\Big|_1^2+x^2\Big|_1^2-8x\Big|_1^2=(2^5-1^5)+(2^2-1^2)-8(2-1)=26.$

№2 Найти $\int\limits_0^1 e^{2x}dx.$

Решение. $\int\limits_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)=0{,}5(7{,}36-1)\approx 3{,}18.$

№3 Найти $\int\limits_0^1\frac{x^3dx}{5x^4+1}.$

Решение. $\int\limits_0^1\frac{x^3dx}{5x^4+1}=\left|\begin{array}{l}t=5x^4+1,\\ dt=20x^3dx,\\ x^3dx=\frac{1}{20}dt\end{array}\right|=\frac{1}{20}\ln t=\frac{1}{20}\ln(5x^4+1)\Big|_0^1=\frac{1}{20}(\ln 6\quad\ln 1)\qquad \ln 6.$

1

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

Найти 1) $\int\limits_0^1\frac{dx}{4-x^2}$; 2) $\int\limits_1^3\left(2x^2+\frac{4}{x}\right)dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x dx$; 4) $\int\limits_0^1\ln(x+1)dx$; 5) $\int\limits_1^e\frac{3\ln^2 x dx}{x}$;

6). $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}e^{\sin x}\cos x dx$

Вычислить интеграл

1. $d\int\limits_1^2\frac{3+x}{x}$ x,

$\int\limits^{\frac{\pi}{2}}$ 2

Решить типовые задачи.

3. $\int\limits_0^1 1-x dx$, Ответ: $\frac{2}{3}$

Ответ: 3ln2 1

4. $\int\limits_1^2 x^2\ln x dx$, Ответ: $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

2. sin $x$cos$x dx$, Ответ: $\frac{1}{3}$

$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$, Ответ: $\frac{1}{2}$

6. $\int\limits_{-2}^{3}(2x^3+x^2-5)dx$;

$\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}1-\cos x\sin x dx$;

0

5.

7.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 106-152 (с. 277).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1(1-27), 2 (с. 232-233).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:
Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.
Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.
Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

1. **Тема занятия № 25 и еѐ актуальность**. Геометрические приложения определенного интеграла.

Применение определенного интеграла во многом облегчает решение ряда задач в геометрии.

2. **Учебные цели**:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла

- уметь применять формулу Ньютона-Лейбница и вычислять определенный интеграл.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1) Вычисление площадей плоских фигур.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 2 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

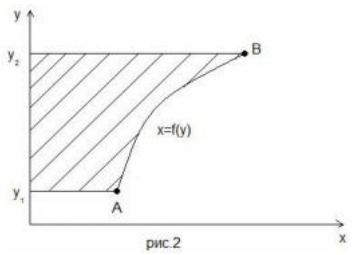
6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

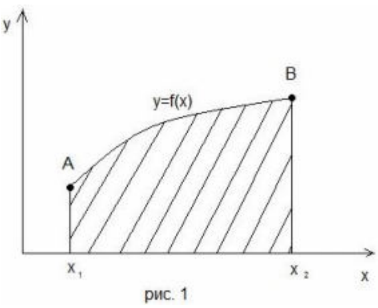
7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

Тест

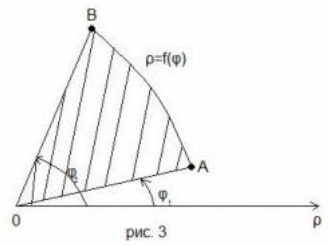
1. Укажите верное соответствие между представленными на рисунках плоскими фигурами и формулами для нахождения их площадей.



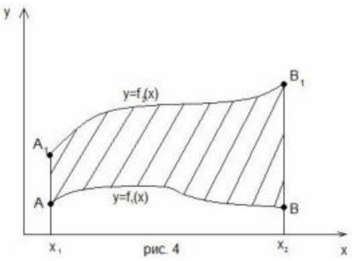
2. $S=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

1) 

1. $S=\int_{y_1}^{y_2} f(y)dy$



3. $S=\int_{x_1}^{x_2} (f_2(x)-f_1(x))dx$



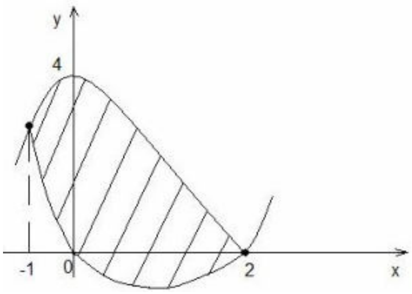
4. $S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$.

2)

3)

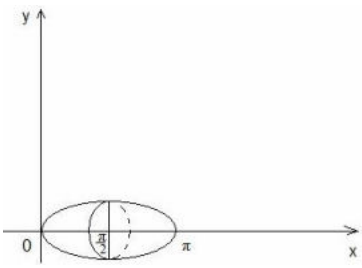
4)

2. Вычислить площадь, ограниченную параболами $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$



Ответ введите целым числом:

3. Вычислить объем тела вращения вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $[0; \pi]$



1) $\pi^2 - 1$; 2) $\frac{1}{3}\pi^2$; 3) $\frac{1}{2}\pi^2$; 4) $\frac{1}{2}\pi$.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная осью ОХ, прямыми x=a, x=b и графиком непрерывной на отрезке [a;b] функции y=f(x), которая не меняет знак на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена не ниже оси абсцисс: Тогда площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$. У любого определенного интеграла (который существует) есть геометрический смысл. С точки зрения геометрии определенный интеграл – это площадь.

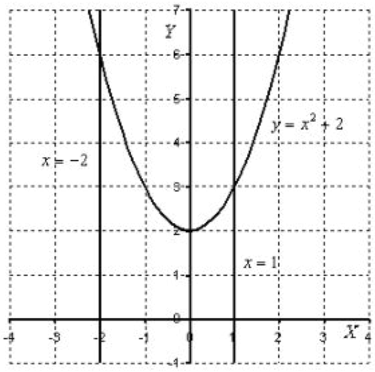
То есть, определенному интегралу (если он существует) геометрически соответствует площадь некоторой фигуры.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Первый и важнейший момент решения – построение чертежа. При построении чертежа рекомендуется следующий порядок: сначала лучше построить все прямые (если они есть) и только потом – параболы, гиперболы, графики других функций. Графики функций выгоднее строить поточечно. Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение y=0 задает ось OX):



На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен над осью OX

$$S = \int_{-2}^{1}(x^2+2)dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}+2-\left(-\frac{8}{3}-4\right) = \frac{1}{3}+2+\frac{8}{3}+4 = 9$$

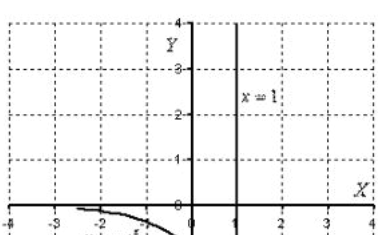
$S = 9$ $ед^2$

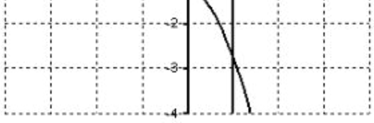
, поэтому:

Ответ:

Пример 2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -e^x$, $x = 1$ и координатными осями.

Решение: Выполним чертеж:





Если криволинейная трапеция расположена под осью OX (или, по крайней мере, не выше данной оси), то её площадь можно найти по формуле:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

$$S = -\int_0^1 (-e^x)dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

В данном случае:

Ответ: $S = (e-1)$ ед$^2 \approx 1{,}72$ ед^2

Не следует путать два типа задач:

1) Если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным.

2) Если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна! Именно поэтому в только что рассмотренной формуле фигурирует минус.

На практике чаще всего фигура расположена и в верхней и в нижней полуплоскости.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x^2$, $y=2x$.

Ответ: $\frac{4}{27}$

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература (см. приложение)

ПРИЛОЖЕНИЕ

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения учебной дисциплины (модуля)

Основная литература

п/№		Наименование	Автор (ы)	Год, место издания	Кол-во экземпляров в библиотеке
1		2	3	4	5
1.		Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник для прикладного бакалавриата: рек. УМО, рек. Мин. образования и науки РФ	Гмурман, В. Е.	- 12-е изд. - М. : Юрайт, 2016. - 479 с.	10
2.		Основы высшей математики: учебник	Лобоцкая, Н. Л.	- 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М. : Альянс, 2015. - 479 с.	1144

Дополнительная литература[1]

п/№	Наименование	Автор (ы)	Год, место издания	Кол-во экземпляров в библиотеке
1	2	3	4	5
1	Руководство к решению задач по теории вероятностей и	Гмурман, В. Е.	11-е изд., перераб. - М.: Высшее	30

1

	математической статистике: учебное пособие		образование, 2007. - 404 с.	
2	Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями [Текст]: учеб. пособие	Шапкин А.С.	4-е изд. - М. : Дашков и К, 2007. - 431 с.	30
3	Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры]: монография	А. А. Самарский, А. П. Михайлов.	2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2005. - 316 с.	30
4	Электронно-библиотечная система «Лань»			http:// e.lanbook.com
5	Электронно-библиотечная система «Консультант студента» для ВПО			www.studmedlib.ru
6	База данных «Электронная учебная библиотека»			http:// library.bashgmu.ru

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения учебной дисциплины (модуля)

1. https://www.medicinform.net/ (Медицинская информационная сеть)
2. ***https://www.studentlibrary.ru/ (Консультант студента)***