ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Кафедра медицинской физики с курсом информатики

МЕТОДИЧЕСКАЯ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ
к практическим занятиям

Дисциплина Высшая математика

Специальность 30.05.02 - Медицинская биофизика

Курс 1-2

Семестр I, II, III, IV

Уфа

Рецензенты:

1. Главный врач

ГБУЗ Республиканский кардиологический центр, к.м.н. Николаева И.Е.

2. Зав. кафедрой общей физики

Уфимского университета науки и технологий,

д.ф.-м.н., профессор Балапанов М. Х.

Автор: доцент Аксенова З.Ф.

Утверждена на заседании № 10 кафедры медицинской физики с курсом информатики, от «18» апреля 2023 г.

1. Тема занятия № 23 и еѐ актуальность. Неопределенный интеграл. Основные способы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, метод подстановки. Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции f(x) найти такую функцию F(x), производная которой была бы равна функции f(x), то есть $F'(x) = f(x)$. Восстановление функции по известной производной этой функции – одна из основных задач интегрального исчисления.

2.Учебные цели:

-- получение навыков нахождения неопределенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение неопределенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения неопределенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие первообразной функции.
2)Понятие неопределенного интеграла.
3)Свойства неопределенного интеграла.
4)Таблица основных интегралов.
5)Непосредственное интегрирование неопределенного интеграла.
6)Метод подстановки для нахождения неопределенного интеграла.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 6 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

Тестовые задания. 1 уровень

Выберите правильный ответ:

1. $\int \sin 3x dx$ равен

1. $\cos 3x + c$; 2. $\frac{1}{3}\cos 3x + c$; 3. $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$; 4. $-\cos 3x + c$; 5. $-\frac{1}{3}\cos x + c$

2. Производная от неопределенного интеграла равна

1. подынтегральной функции; 2. константе с; 3. подынтегральному выражению; 4. единице; 5. первообразной подынтегральной функции.

3. Интеграл от дифференциала первообразной равен

1. константе с; 2. подынтегральной функции; 3. подынтегральному выражению; 4. самой первообразной и дополнительному слагаемому С; 5. константе С; 6. 0.

4. $\int 4x^3 dx$ равен

1. $12x^2 + c$; 2. $4x^2 + c$; 3. $x^2 + c$; 4. $x^4 + c$; 5. $12x^4 + c$

5. $\int \frac{dx}{x+1}$ равен

1. $(x+1)^2 + c$; 2. $\ln|x| + c$; 3. $\ln|x+1| + c$; 4. $\frac{1}{(x+1)^2} + c$; 5. $(x+1)^3 + c$

6. Определить множество первообразных для $f(x) = 3x^2$

1. $6x + c$; 2. $2x + c$; 3. $x^3 + c$; 4. $x^2 + c$

7. Дифференциал от неопределенного интеграла равен

1. подынтегральной функции; 2. константе с; 3. подынтегральному выражению; 4. единице; 5. первообразной подынтегральной функции.

8. $\int e^{2x} dx$ равен

1. $e^{2x} + c$; 2. $\frac{1}{2}e^{2x} + c$; 3. $2e^{2x} + c$; 4. $e^x + c$; 5. $2e^x + c$

9. Определить множество первообразных для $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$

1. $2\arcsin x + c$; 2. $arctg x + c$; 3. $\arcsin x + c$; 4. $2 arctg x + c$; 5. $2 arcctg x + c$

10. Интеграл $\int \ln x dx/x$ равен

1. x+c; 2. $ln|x|+c$; 3. x^2+c; 4. $0.5 ln|x|+c$; 5. $0.5 ln^2 x+c$

Ответы на тесты:

1.3, 2.1, 3.4, 4.4, 5.3, 6.3, 7.3, 8.2, 9.4, 10.5.

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Интеграл, который вычисляется способом непосредственного интегрирования

а) $\int x\sin x dx$; б) $\int xe^x dx$; в) $\int (x^2+1) dx$; г) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; д) $\int \ln x dx$

2. Интеграл, который можно вычислить только подстановкой

а) $\int x\cos x dx$; б) $\int \ln x dx$; в) $\int xdx$; г) $\int dx$; д) $\int \frac{xdx}{x^2-1}$

3. Интеграл, который можно вычислить только способом интегрирования по частям.

$\int$ $\int$ $\int$

а) $\int (x+1)\,dx$; б) sin2xdx; в) 3dx; г) xsinxdx; д) $3x^2dx$

4. Производная от неопределенного интеграла равна

а) подынтегральной функции; б) константе С; в) подынтегральному выражению

г) единице; д) первообразной подынтегральной функции

5. Интеграл $\int$ sin2xdx равен

а) cosx+c; б) cos2x+c; в) -0.5cos2x+c; г) -cos2x+c; д) -cosx+c

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют первообразной. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка справедливо равенство $F'(x) = f(x)$. Например, функция $F(x) = x^2$ есть первообразная функции $f(x) = 2x$. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$, где $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования.

Таким образом, если $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C - любое действительное число. Так, пользуясь определением неопределенного интеграла, можно записать: $\int 2xdx = x^2 + C$; $\int \cos xdx = \sin x + C$ и т.д.

Таблица основных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;\quad \int e^x dx = e^x + C;\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\quad \int \sin xdx = -\cos x + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C;\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C;\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C;\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно вынести за знак интеграла, т.е. $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, где m - постоянная величина, не равная нулю.

3. Интеграл от алгебраической функций равна алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

5. Неопределенный интеграл от дифференциала (производной) некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ или $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по

$$\int \sin(4-7x)dx = \left| \begin{matrix} t = 4-7x \\ dt = -7dx \end{matrix} \right| = \int \sin t \left(-\frac{1}{7}\right) dt = -\frac{1}{7}\int \sin t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{7}\cdot(-\cos t) + C = \frac{1}{7}\cos t + C$$

Вернемся к переменной x : $\int \sin(4-7x)dx = \frac{1}{7}\cos(4-7x) + C$.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. Найти интеграл

1. $\int e^{3\cos x} \sin x\, dx$
2. $\int \sin^4 x \cos x dx$
3. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$
4. $\int \sqrt[3]{1-6x^5}\, x^4 dx$

$\int \sqrt{1+4\sin x}\cos x\, dx$

$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx;$

$\int \frac{t^2 dt}{(1+2t^3)^2};$

Вычислить интеграл способом непосредственного интегрирования.

$\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$, Ответ: $-2\cos x + c$

$\int \frac{x + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} dx$, Ответ: $x + 4\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + c$

3. $\int (2+x)(1-x^2)dx$, Ответ: $2x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} +$

$\int (\frac{2}{x} + 3\cos x)dx$, Ответ: $2\ln|x| + 3\sin x + c$

5. $\int (x^5 + 6^x)dx$, Ответ: $\frac{x^6}{6} + \frac{6^x}{\ln 6} + c$

$\int (\frac{1+x}{x})^2 dx$, Ответ: $-\frac{1}{x} + 2\ln|x| + x + c$

Вычислить интеграл подстановкой.

$\int \sqrt{x-2}dx$, Ответ: $\frac{2(x-2)\sqrt{x-2}}{3} + c$

$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$, Ответ: $\sqrt{x^2+3} + c$

3. $\int \sin x \cos^2 x dx$, Ответ: $-\frac{\cos^3 x}{3} + c$

$\int e^{\sin x} \cos dx$, Ответ: $e^{\sin x} + c$

$\int \frac{tgx}{\cos^2 x} dx$, Ответ: $\frac{tg^2 x}{2} + c$

6. $\int \sin 3x dx$, Ответ: $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$

7. $\int x^2 \sqrt{x^3 - 2}dx$, Ответ: $\frac{2}{9}(x^3-2)\sqrt{x^3-2} + c$

5.

6.

7)

1.

2.

c

4. (

6. (

1.

2.

4.

5.

8. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

9. $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2} dx$

Типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-68 (с. 270-274).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-2 (с. 207-208).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.
Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.
Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.
Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 6, пар. 6.1, 6.2 (с. 213-218).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 10, пар. 76-79 (с. 198-209).

1. **Тема занятия № 24 и её актуальность**. Метод интегрирования по частям.

Среди всех элементарных методов интегрирования метод интегрирования по частям занимает место не только самого трудного, но и самого эффективного. В связи с этим обстоятельством метод интегрирования по частям актуален при решении ряда современных физических и технических задач.

2. **Учебные цели**:

- усвоить интегрирование по частям на уровне знаний и умений решать типовые задачи, закрепить метод интегрирования с помощью замены переменной.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение неопределенного интеграла;
- **формулу для нахождения неопределенного интеграла методом взятия по частям.**

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1. Замена переменной в неопределенном интеграле.
2. Метод интегрирования по частям неопределенного интеграла.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 6 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов. Вопросы для самоконтроля.

1. сущность метода подстановки, формула метода замены переменной и следствия из неё, схема метода подстановки;

2. вычисление неопределенного интеграла от тригонометрических функций;
3. вычисление неопределенного интеграла с дробной функцией.

Вопросы для самоизучения:

1. вычисление неопределенного интеграла вида $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx$;
2. вычисление неопределенного интеграла с непосредственным применением формул тригонометрии;
3. вычисление неопределенного интеграла смешанного вида (иррациональная функция с тригонометрической).

Задания для самоконтроля: решение обучающимися индивидуальных наборов тестовых заданий по теме.

1. Завершии фразу:

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы и обратные тригонометрические функции, бывает удобным воспользоваться… 2. Допишите формулу: $\int vdu =$

3. Найди правильный ответ (обведи соответствующую цифру), $\int 2x\cos 2x\,dx =$

(1) $x\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

(2) $x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$

(3) $x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

(4) $x\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$

1) $\int (x^2 + 3x - 1)\ln x\,dx$

2) $\int x^3 e^{-x}dx$

3) $\int (x^3 + 1)\cos x\,dx$

Типовые задачи.

Найти интегралы

1) $\int \arccos x\,dx$

2) $\int x\ln x\,dx$, Ответ: $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

3) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

4) $\int x\ln(x+1)dx$

5) $\int (6x - 4)\sin 4x\,dx$

6) $\int x e^{-2x}dx$

7) $\int (x+1)e^{x}dx$

8) $\int (x^2 - 2x + 3)\cos x\,dx$

9) $\int x e^{5x^2} dx$

10) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

Задания для самостоятельной работы

Задания	Ответы
1. $\int (2x+3) e^{5x} dx$	$\frac{1}{5}(2x+3)e^{5x} - \frac{2}{25}e^{5x} + C$
2. $\int (2-4x)\sin 3x\,dx$	$-\frac{1}{3}(2-4x)\cos 3x - \frac{4}{9}\sin 3x + C$
3. $\int (9x-7)\cos 10x\,dx$	$\frac{1}{10}(9x-7)\sin 10x + \frac{9}{100}\cos 10x + C$
4. $\int x e^{-3x} dx$	$-\frac{1}{3}e^{-3x}\cdot x - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$
5. $\int (7+4x)\sin 6x\,dx$	$\frac{1}{6}(7+4x)\cos 6x + \frac{1}{9}\sin 6x + C$
6. $\int (2x-11)\cos 20x\,dx$	$\frac{1}{20}(2x-11)\sin 20x + \frac{1}{200}\cos 20x + C$
7. $\int (7+6x) e^{8x} dx$	$\frac{1}{8}(7+6x)e^{8x} + \frac{3}{32}e^{8x} + C$
8. $\int x\cos 4x\,dx$	$\frac{x}{4}\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$
9. $\int (4+6x)\sin\frac{4}{3}x\,dx$	$-\frac{3}{4}(4+6x)\cos\frac{4}{3}x + \frac{27}{8}\sin\frac{4}{3}x + C$
10. $\int (3-7x^2) e^{6x} dx$	$\frac{1}{6}(3-7x^2)e^{6x} + \frac{7}{18}(x-1)e^{6x} + C$

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ - формула интегрирования по частям.

Эта формула применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функции, например,

$$\int x e^{2x} dx,\quad \int x^3 \ln x\,dx;\quad \int (x+1)\sin x\,dx.$$

Чтобы воспользоваться формулой интегрирования по частям, u и dv выбираем в подынтегральном выражении, du и v получаем по формулам:

$$du = u'dx;\quad v = \int dv$$

Большую часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, можно разбить на три группы.

1. интегралы вида $\int P(x)\,arctg\,x\,dx$, $\int P(x)\,arcctg\,x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, где P(x)-многочлен. Для их вычисления следует положить u равным одной из указанных выше функции, а dv= P(x)dx.

2. интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kx\,dx, \int P(x)\cos kx\,dx$, где P(x)- многочлен, а k–некоторое число. Для их вычисления следует положить u=P(x), а dv=e^{kx}dx, dv=sinkxdx, dv=coskxdx соответственно.

3. интегралы $\int e^{ax}\cos bx\,dx, \int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a и b некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл $\int x e^x dx$.

Решение. $\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, & dv = e^x dx; \\ du = dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C.$

Пример 2. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл $\int x^2 \sin x dx$.

Решение.

Имеем $\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$

Для нахождения полученного в правой части равенства интеграла снова интегрируем по частям: $\int x \cos x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$ (см. решение примера 1). В результате получаем окончательный ответ: $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C.$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Контрольная работа. Вариант 1

а) $\int \left(2e^x - 3\cos x + 3x^5\right) dx$; б) $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5x^3}{x^2} dx$; в) $\int \frac{5dx}{2(1 + 25x^2)}$; г) $\int 2x\sqrt{x^2 - 7}dx$

д) $\int \cos x (1 - \sin x)^3 dx$; е) $\int x(x - 5)\sin 4x dx$; ж) $\int (x^2 - 1)e^{-2x} dx$; з) $\int (x - x^2)\ln 2x dx$

Вариант № 2

а) $\int \left(2\sin x - 4e^x + 5x^7\right) dx$; б) $\int \frac{2x^4 - 5x + 6x^7}{x} dx$; в) $\int 2\cos\frac{2 - 4x}{3}dx$; г) $\int 3x\sqrt{x^2 - 4}dx$

д) $\int \cos x(\sin x - 3)dx$; е) $\int (-3x^2)\cos(x + 1)dx$; ж) $\int (3 + 2x^2)e^{\frac{x}{3}}dx$; з) $\int (4 + 5x^3)\ln(1 - x)dx$

Вариант № 3

$\int \left(4x^7 - 5e^x + 8\cos x\right) dx$; б) $\int \frac{7x^4 - 11x^2 + 9x^3}{11x^2} dx$; в) $\int \frac{2dx}{\cos^2\left(1 - \frac{4}{7}x\right)}$; г) $\int 4x\sqrt{2 + x^2}dx$;

д) $\int \sin x(2 - \cos x)^2 dx$; е) $\int x(2x + 1)\sin(1 - 2x)dx$; ж) $\int (4x - 5)e^{x+1}dx$; з) $\int (3x - 4x^2)\ln(3x + 1)dx$ а)

Типовые задачи

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 85-95 (с. 276).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 3-11 (с. 208-209).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приёмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Вычислить интеграл способом интегрирования по частям.

1. $\int x\cos 3x dx$

Ответ: $\frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c$

2. $\int x^2 \sin 2x dx$

$-\frac{x^2}{2} \quad x \quad + \frac{1}{4}$

$\int$

Ответ: $\overset{+}{\cos} \overline{2}x\sin 2x\cos 2xc \quad +$

$2 \qquad 2$

3. $arctgxdx$

Ответ: $xarctgx+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$

4. $\int \ln xdx$

Ответ: $x\ln x - x + c$

Задания для самостоятельной работы

Задания	Ответы
1. $\int \arcsin x dx$	$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$
2. $\int \text{arctg}\, 3x\, dx$	$x\,\text{arctg}\, 3x-\frac{1}{6}\ln\ 1+9x^2\ +C$
3. $\int \ln 5xdx$	$x\ln 5x-x+C$
4. $\int \arccos 3xdx$	$x\arccos\ 3x-\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+C$
5. $\int x\cdot\ln 2xdx$	$\frac{x^2}{2}\ln 2x-\frac{1}{4}x^2+C$
6. $\int \arcsin 4xdx$	$x\arcsin 4x+\frac{1}{4}\sqrt{1-16x}+C$
7. $\int (2-3x)\ln xdx$	$\left(2x-\frac{3}{2}x^2\right)\ln x-2x+\frac{3}{4}x^2+C$
8. $\int x\,\text{arctg}\ x\,dx$	$\frac{x^2}{2}\text{arctg}\ x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\text{arctg}\ x+C$
9. $\int x^2\ln xdx$	$\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$
10. $2x\int \text{arctg}\ xdx$	$x^2\ 1+\text{arctg}\ x\ x\ C$

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 6, пар. 6.2 (с. 217-218).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 10, пар. 79 (с. 204-209).

1. **Тема занятия № 25 и её актуальность**. Интегрирование рациональных функций.

Далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

2. Учебные цели:

- усвоить интегрирование по частям на уровне знаний и умений решать типовые задачи, закрепить метод интегрирования с помощью замены переменной.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение понятия первообразной, неопределенного интеграла;
- свойства неопределенного интеграла
- таблицу интегралов;
- методы интегрирования;
- область применения неопределенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции, неопределенный интеграл;
- применять метод непосредственного интегрирования и замены переменной.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1.Какие функции называются рациональными? Приведите примеры рациональных функций одной и двух переменных.

2. Какие рациональные функции называются целыми, какие — дробными? Приведите примеры целых и дробных рациональных функций.
3. Какие рациональные функции называются правильными, какие — неправильными? Приведите примеры правильных и неправильных рациональных функций.
4. В каком виде можно представить неправильную рациональную функцию?
5. Как выделить целую часть у неправильной рациональной функции?
6. Сформулируйте теорему о разложении правильной рациональной функции на элементарные дроби.
7. Какие слагаемые в разложении правильной рациональной функции $Q_m(x)/Q_n(x)$ на элементарные дроби соответствуют каждому действительному нулю a кратности k знаменателя $Q_n(x)$?
8. Какие слагаемые в разложении правильной рациональной функции $Q_m(x)/Q_n(x)$ на элементарные дроби соответствуют каждой паре комплексно сопряженных нулей кратности k знаменателя $Q_n(x)$ 9. В чем заключается метод неопределенных коэффициентов для разложения правильной рациональной функции на элементарные дроби? **4. Вид занятия**: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа.

На изучение указанной выше темы, отведено 6 академических часа по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Интегрирование рациональных дробей

Дробно-рациональной функцией (рациональной дробью) $R(x)$ называется отношение двух многочленов с действительными коэффициентами, т.е. $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где m, n - степени многочленов.

Если $m<n$, то дробь правильная.

Если $m\geq n$, то дробь неправильная.

Всякую неправильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной остаточной дроби $\frac{P_s(x)}{Q_n(x)}$, $s<n$, т.е. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=L(x)+\frac{P_s(x)}{Q_n(x)}$.

Рассмотрим общее правило интегрирования рациональных дробей.

Чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо:

а) Если дробь неправильная, то выделить целую часть и остаточную правильную рациональную дробь;

б) разложить знаменатель правильной рациональной дроби на линейные и квадратичные множители (если это необходимо), при этом возможны следующие типы множителей:

$(x-a)$ - линейный, $(x-a)^k$ - линейный кратности k, $x^2+px+q, D<0$ - квадратичный;

в) разложить правильную дробь на сумму простейших, при этом:

множителю $x-a$ соответствует простейшая рациональная дробь I типа $\frac{A}{x-a}$

множителю $(x-a)^k$ соответствует разложение (сумма дробей I и II типов) $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$

множителю x^2+px+q соответствует дробь III типа $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

г) привести обе части равенства к общему знаменателю и приравнять числители;

д) найти неопределенные коэффициенты;

е) проинтегрировать каждую из полученных дробей и выделенную целую часть.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Представить рациональную дробь $\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби

$\dfrac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}$ - неправильная рациональная дробь, т.к. степень числителя ($m=3$) больше степени знаменателя ($n=2$).

Разделим числитель на знаменатель. При этом многочлены запишем по убыванию степеней, а степени отсутствующие в явном виде с нулевыми коэффициентами.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2+x+2 & x^2-7x+12 \\
\underline{x^3-7x^2+12x} & x+7 \text{ - целая часть} \\
7x^2-11x+2 & \\
\underline{7x^2-49x+84} & \\
38x-82 & \text{ - остаток}
\end{array}
$$

тогда

$$\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}=x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}.$$

Интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию соответствующих простейших дробей. Простейшими дробями называются дроби следующих 3-х типов:

$\dfrac{A}{x-a}$ - I тип

$\dfrac{A}{(x-a)^n}$, где $n>1$, $n\in Z$ - II тип

$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где дискриминант знаменателя отрицательный, - III тип

Рассмотрим интегрирование простейших рациональных дробей на примерах.

Пример 2. Интегрирование простейшей рациональной дроби I типа.

$$+ \quad + \quad = \left(- \quad \right)\left(- \quad \right)$$

$$\int\frac{4dx}{1-2x}=4\int\frac{dx}{1-2x}=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ln|1-2x|+C=C-2\ln|1-2x|.$$

Пример 3. Интегрирование простейшей рациональной дроби II типа.

$$\int\frac{2}{(x+3)^2}dx=2\int(x+3)^{-2}dx=2\cdot\frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1}+C=2\frac{(x+3)^{-1}}{-1}+C=C-\frac{2}{x+3}.$$

Пример 4. Интегрирование простейшей рациональной дроби III типа.

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx$$

1. Найдем дискриминант знаменателя $x^2+2x+10$

$$D=2^2-4\cdot1\cdot10=-36<0\Rightarrow \text{дробь III типа.}$$

2. Выделим в знаменателе полный квадрат.

$$x^2+2x+10=(x^2+2\cdot x\cdot1+1^2)-1^2+10=(x+1)^2+$$

3. Введем замену: основание выделенного квадрата принимаем за новую переменную.

$$\int\frac{3x+5}{(x+1)^2+9}dx=\begin{vmatrix}x+1=t\\dx=dt\\x=t-1\end{vmatrix}=\int\frac{3(t-1)+5}{t^2+9}dt=\int\frac{3t+2}{t^2+9}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+9}+2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$ I-й интеграл берется методом замены, а II-й – табличный

$$=\begin{vmatrix}t^2+9=z\\2tdt=dz\\tdt=\dfrac{dz}{2}\end{vmatrix}+2\int\frac{dt}{t^2+3^2}=3\int\frac{\frac{dz}{2}}{z}+2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+c=$$

4. Возвращаемся к прежним переменным

$$=\frac{3}{2}\ln|z|+\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln|t^2+9|+\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+c$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+10|+\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+c$$

Методы нахождения неопределенных коэффициентов рассмотрим на примерах.

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{3x+8}{x^2+3x-10}dx$

$\frac{3x+8}{x^2+3x-10}$ - правильная рациональная дробь.

Разложим знаменатель $x^2+3x-10$ на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена.

$x^2+3x-10=0$

$x_1=-5, x_2=2,$

тогда $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$

Представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей. Линейным множителям $(x+5)$ и $(x-2)$ знаменателя данной дроби соответствуют простейшие рациональные дроби вида

$\frac{A}{x+5}$ и $\frac{B}{x-2}$.

Тогда $\frac{3x+8}{x^2+3x-10}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-2}$.

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{3x+8}{x^2+3x-10}=\frac{3x+8}{(x+5)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)}$$

т.к. знаменатели равны, то приравняем числители:

$3x+8=A(x-2)+B(x+5).$

Коэффициенты A и B можно найти одним из способов. I способ (метод сравнивания коэффициентов).

$3x+8=A(x-2)+B(x+5)$

$3x+8 = Ax-2A+Bx+5B$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 3 = A+B \qquad \cdot(2) \\ x^0 & 8 = -2A+5B \end{array} \quad \begin{cases} 6 = 2A+2B \\ 8 = \underline{-2A+5B} \end{cases}$$

$14 = \qquad 7B \Rightarrow B = 2$

Тогда 1 уравнение системы имеет вид $3 = A+2 \Rightarrow A = 1$. Таким образом $A \quad 1, B \quad 2$.

II способ (метод частных решений).

$3x+8 = A(x-2)+B(x+5)$

Пусть $x = 2$, тогда $3\cdot 2+8 = A(2-2)+B(2+5)$

$14 = 7B$

$2 = B$

Пусть $x = -5$, тогда $3\cdot(-5)+8 = A(-5-2)+B(-5+5)$

$-7 = -7A$

$1 = A$

Таким образом $A = 1, B = 2$.

Тогда

$$\frac{3x+8}{x^2+3x-10} = \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-2}$$

Проинтегрируем

$$\int \frac{3x+8}{x^2+3x-10}dx = \int\left(\frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-2}\right)dx = \int\frac{dx}{x+5} + 2\int\frac{dx}{x-2} = \ln|x+5| + 2\ln|x- \quad | +$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx$

2 C.

$\dfrac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}$ - неправильная рациональная дробь.

Представим дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби (решение см. пример 4.1)

Тогда, $\int \dfrac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx = \int \left(x+7+\dfrac{38x-83}{x^2-7x+12} \right) dx$

Разложим знаменатель правильной дроби на множители:

$$x^2-7x+12=0 \Rightarrow x=4;\ x=3 \Rightarrow x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$$

$$\frac{38x-82}{x^2-7x+12}=\frac{38x-82}{(x-4)(x-3)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-3}$$

$$\frac{38x-82}{(x-4)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x-4)}{(x-4)(x-3)} \Rightarrow 38x-82=(A+B)x+(-3A-4B)$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 38=A+B \\ x^0 & -82=-3A-4B \end{array}\right\}$$ Решив систему, получаем $A=70,\ B=-32$

$$\frac{38x-82}{x^2-7x+12}=\frac{70}{x-4}-\frac{32}{x-3}$$

$$\int\left(x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}\right)dx=\int\left(x+7+\frac{70}{x-4}-\frac{32}{x-3}\right)dx=$$

$$=\int xdx+7\int dx+70\int\frac{dx}{x-4}-32\int\frac{dx}{x-3}=\frac{x^2}{2}+7x+70\ln|x-4|-32\ln|x-3|+c.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$

- $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ правильная рациональная дробь, так как степень числителя – 2, а знаменателя – 3.

Знаменатель уже разложен на линейные множители, причем множитель x 1 имеет кратность 2.

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A(x^2-1)+B(x-1)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)} \Rightarrow$$

$$x^2+1=(A+C)x^2+(B+2C)x+(-A-B+C)$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=1 \\ x^1 & B+2C=0 \\ x^0 & -A-B+C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\frac{1}{2};\ B=-1;\ C=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int(x+1)^{-2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\left(\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right)+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c=\frac{1}{2}\ln|(x+1)(x-1)|+\frac{1}{x+1}+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+c.$$

Пример 8

Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2-9}\,dx.$

Решение.

Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{2x+3}{x^2-9}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

Сгруппируем слагаемые и приравняем коэффициенты при членах с одинаковыми степенями:

$$A\ x+3\ +B\ x-3\ =2x+3,\ \Rightarrow Ax+3A+Bx-3B=2x+3,\ \Rightarrow\ A+B\ x+3A-3B=2x+3.$$

Следовательно

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A-3B=3 \end{cases},\ \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{3}{2} \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{2x+3}{x^2-9}=\frac{\frac{3}{2}}{x-3}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Теперь легко вычислить исходный интеграл

$$\int\frac{2x+3}{x^2-9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{3}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\ x-3\ ^2\ \ x+3\ \right|+C.$$

Пример 9

Вычислить интеграл $\int\frac{x^2-2}{x+1}dx.$

Решение.

Сначала выделим правильную рациональную дробь, разделив числитель на знаменатель.

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}\quad\int\frac{dx}{x^2+4x+4+4}\quad\int\frac{dx}{x+2\ ^2+4}\quad\int\frac{dx\ \ +2}{x+2\ ^2+2^2}\quad\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}+C.$$

Вычислить интеграл $\int\frac{x^2dx}{x-1\ \ x-2\ \ x-3}$

$$\frac{x^2-2}{x+1}=x-1\ \ \frac{1}{x\ \ 1}.$$

Получаем $\int\frac{x^2-2}{x+1}dx=\int\left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int xdx-\int dx-\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}\ \ x\ \ \ln|x\ \ 1|\ \ C.$

Пример 10

Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2\ \cdot\ 4x+8}$

Решение

Пример 11

Решение.

Разложим подынтегральное выражение на сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Определим коэффициенты:

$$A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)=x^2,$$

$$Ax^2-2Ax-3Ax+6A+Bx^2-Bx-3Bx+3B+Cx^2-Cx-2Cx+2C=x^2,$$

$$(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+6A+3B+2C=x^2.$$

Следовательно,

$$\begin{cases}A+B+C=1\\5A+4B+3C=0\\6A+3B+2C=0\end{cases},\ \Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-4\\C=\frac{9}{2}\end{cases}.$$

Получаем $\displaystyle\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-3}.$

Интеграл, соответственно, равен

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-4\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-4\ln|x-2|+\frac{9}{2}\ln|x-3|+C.$$

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

Задания для самостоятельной работы

Задания	Ответы
1. $\int\frac{3}{4x-5}dx$	$\frac{3}{4}\ln\|x-5\|+C$
2. [redacted] $\frac{dx}{\ldots-3)^7}$	$C-\frac{1}{6(x-3)^6}$
3. [redacted] $\frac{dx}{\ldots^2+4x+8}$	$\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C$
4. [redacted] $\frac{3x-5}{x^2+4x+5}dx$	$\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)+11\,arctg(x+2)+C$
5. $\int\frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx$	$\frac{1}{2}\ln\|x-1\|+\ln\|2x+3\|+C$
6. [redacted] $\frac{3x^2+8}{\ldots^3+4x^2+4x}dx$	$2\ln\|x\|+\ln\|x+2\|+\frac{10}{x+2}+C$
7. [redacted] $\frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$	$3\ln\|x-2\|-\ln\|x-1\|+C$
8. [redacted] $\frac{2x^3-2x+3x-1}{x}dx$	$\frac{x^2}{2}+2x+\frac{2}{x-1}+C$
9. [redacted] $\frac{dx}{(x+1)\ldots(x-2)\ldots}$ [redacted] x^2+2 dx	$\frac{2}{3}\ln\|x-2\|+\frac{1}{3}\ln\|x+1\|+\frac{1}{x+1}+C$

10. $-\ x^3 + 2x\ 2\ dx$ / $x + 1\ ^2\ ^2\ 1 +$	$\frac{1}{2\sqrt{x-1}2} + -\frac{1}{2}\left(+^2\right) + -\ 3arctgx\ \frac{1}{2} + C \ln x$

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 96-101 (с. 277).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

1) Какие из дробей является правильными?

а) $\dfrac{(2x^6 - x)^3}{(x^4 + 4x - 1)^5}$; б) $\dfrac{x^3 + 1}{7x^2 - 9x + 1}$; в) $\dfrac{3^3 + x}{6x^5 - 5x + 3}$ г) $\dfrac{3x^4 - 6}{(2x^2 + x - 3)^2}$

2) Чему равен интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + px + q}$

$$\sqrt{x^2 + \frac{p}{2}}\ \ln\left|\frac{x^2 + px + q}{q - \frac{p^2}{4}}\right| + C \text{ ; б) } \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ \arctan\frac{x + \frac{p}{2}}{q - \frac{p^2}{4}} + C \text{ ; в) } \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\ \arctan\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \text{ ;}$$

$$\left|\frac{\sqrt{x + \frac{p}{2}}}{q - \frac{p^2}{4}}\right| + C$$

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий. а)

г)ln

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 6, пар. 6.3 (с. 218-224).

1. **Тема занятия № 26 и еѐ актуальность**.
   Интегрирование тригонометрических и простейших иррациональных функций.

Актуальность темы занятия обусловлена необходимостью решения прикладных задач, связанных с интегрированием.

2. Учебные цели:

- научиться брать интегралы от тригонометрических и простейших иррациональных функций.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение понятия первообразной, неопределенного интеграла;
- свойства неопределенного интеграла
- таблицу интегралов;
- методы интегрирования;
- область применения неопределенного интеграла
- интегрирование простейших иррациональных функций;
- основные подстановки интегрирования простейших иррациональных функций.
- интегрирование тригонометрических функций.
- универсальные тригонометрические подстановки, формулы понижения степени, рекуррентные формулы.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции, неопределенный интеграл;
- применять метод непосредственного интегрирования и замены переменной;
- уметь интегрировать простейшие иррациональные функции.

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. С помощью каких подстановок интегралы от тригонометрических функций удается рационализировать?
2. С помощью каких подстановок интегралы от иррациональных функций удается рационализировать?

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 6 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx ,$$

где m и n - целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применения формул понижения.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1. $\int \cos^5 x \cdot dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x \cdot dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot d(\sin x) = |\sin x = t| = \int (1-t^2)^2 \cdot dt = \int (1-2t^2+t^4)dt = t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

Пример 2. $\int \sin^6 x \cdot dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-cox2x}{2}\right)^3 dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1-3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)dx = \frac{1}{8}\int\left(1 - 3\cos 2x + 3\frac{1+co4x}{2} + (1-\sin^2 2x)\cos 2x\right)dx =$$

$$\frac{1}{8}\left(x - 3\frac{\sin 2x}{2} + \frac{3}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\right) + C.$$

Из приведенных примеров видно, что в случае, когда одна из степеней нечѐтная, удобно вводить новую переменную. Если же обе степени – четные, то удобно (возможно неоднократно) понижать степени, используя тригонометрические формулы.

Следующие интегралы вычисляются с помощью формул:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

Рассмотрим конкретный пример.

$$\int \sin 5x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (\sin(5x-x) + \sin(5x+x)) \cdot dx =$$

$$\frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 6x) \cdot dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 4x}{4} + \frac{-\cos 6x}{6}\right) + C.$$

Интегрирование с помощью универсальной тригонометрической подстановки

Вычисление интегралов вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

где R - рациональная функция, в общем виде приводится к интегрированию рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$tg\frac{x}{2}=t.$

Пример. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=$ (выразим подынтегральную функцию и дифференциал через функцию и дифференциал $tg\frac{x}{2}$) $=\int\frac{dx}{2\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+5\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)}=$

$$\int\frac{1}{6\sin^2\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}dx=\int\frac{2d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{6tg^2\frac{x}{2}+4tg\frac{x}{2}+4}=$$

=

(всё подготовлено к выполнению универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2}=t$)

$$=\int\frac{2dt}{6t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}d\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\,arctg\frac{\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{5}{3}}}+C=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

Пример: $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=\int\frac{a(\sin x+2\cos x)+b(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}dx=$

(найдём неопределенные коэффициенты из системы уравнений:

$$\begin{array}{l}\sin x\,|\,1=a-2b\\ \cos x\,|\,-1=2a+b\end{array}\ \rightarrow\ \begin{cases}a=-\frac{1}{5}\\ b=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

и получим два простых интеграла)

$$=\int\frac{-\frac{1}{5}(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}dx+\int\frac{-\frac{3}{5}(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}dx=-\frac{1}{5}\int dx-\frac{3}{5}\int\frac{d(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}=$$

$$=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C$$

=

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. $\int\frac{1}{\sin^3 x}dx$, 2. $\int\frac{1}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}dx$, 3. $\int tg^5 x\cdot dx$, 4. $\int ctg^6 x\cdot dx$ 5. $\int\frac{1}{\sin^3 x}dx$, 6. $\int\frac{1}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}dx$, 7. $\int tg^5 x\cdot dx$, 8. $\int ctg^6 x\cdot dx$; 9. $\int\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot dx$, 10. $\int\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot dx$; 11. $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$, 12. $\int\frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$, 13. $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$; 14. $\int\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$, 15. $\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^4 x}dx$, 16. $\int\frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$; 17. $\int\frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}dx$, 18. $\int\frac{dx}{3+5ctgx}$, 19. $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx$, 20. $\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$; 21. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

22. $\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx$; 23. $\int\sin 2x\cos 4x dx$; 24. $\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$;

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 102-105 (с. 277).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

1. Найти $\int\cos 2x\sin 5x\,dx$

а) $\frac{1}{4}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$; б) $\frac{1}{4}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$; в) $-\frac{1}{4}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$;

г) $-\cos 7x-\cos 3x+C$

2. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$

а) $6\left(\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x}\right)+c$ б) $6\left(\sqrt[6]{x}+arctg\sqrt[6]{x}\right)+c$; в) $3\left(\sqrt[6]{x}+arctg\sqrt[6]{x}\right)+c$;

г) $3\sqrt[6]{x}+6\,arctg\sqrt[6]{x}+c$

3. Найти $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

а) $\sqrt{x+1}\cdot e^{-x}+c$; б) $2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$; в) $\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$; г) $2\left|\sqrt{x}+1\right|+c$ г)3 x

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 6, пар. 6.4-6.5 (с. 224-228).

1. **Тема занятия № 27 и её актуальность**. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции f(x) найти такую функцию F(x), производная которой была бы равна функции f(x), то есть $F'(x) = f(x)$. Восстановление функции по известной производной этой функции – одна из основных задач интегрального исчисления.

2. **Учебные цели**:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла
- решать некоторые задачи геометрии и физики с помощью определенного интеграла

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие определенного интеграла.
2)Свойства определенного интеграла.
3)Формула Ньютона-Лейбница.
4)Несобственные интегралы.
5)Приближенное вычисление определенных интегралов. Формула трапеций.

4. **Вид занятия**: практическое занятие.
5. **Продолжительность занятия:** 3 часа.

На изучение указанной выше темы, отведено 6 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. **Оснащение**:
   6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.
   6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Выберите среди приведенных выражений верно написанные свойства определенного интеграла, если f(x) и g(x) – интегрируемы на [a; b], [a; c], [c; b] k=const.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$;

1) $$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a \frac{1}{f(x)}dx$$; 2) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$;

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$.

3)

4) ;

5)

6)

2. Теорема о среднем значении определенного интеграла: если функция y=f(x) непрерывна на [a; b], то найдется хотя бы одна точка с є [a; b], в которой выполняется равенство 1)

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$; 2) $$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$;

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(c)}{b-a}$$;

$$\int_a^b f(x)dx = c(f(b)-f(a))$$.

3. Формула Ньютона-Лейбница $$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$ справедлива, если

3)

4)

1) $F'(x) = f(x)$;

2) $F(x)$ – непрерывна на $[a; b]$; $F'(x) = f(x)$;

3) $f(x)$ – непрерывна на $[a; b]$; $F'(x) = f(x)$;

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

4)

4. Укажите верное соответствие между функцией и ее свойством. Замена переменной в определенном интеграле может быть выполнена по формуле

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, если $f(x)$, $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$

являются

Функция	Свойство
$f(x)$;	1) непрерывная функция на $[\alpha; \beta]$, где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(b)$
$\varphi(t)$;	2) непрерывная функция на $[a; b]$;
$\varphi'(t)$.	3) монотонная и непрерывная функция на $[\alpha; \beta]$, где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(b)$.

1. ;

2.

3.

5. Выберите верные утверждения

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$ -четная

1) ;

$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$,если $f(x)$-четная

;

2)

3) ;

4)

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$,если $f(x)$-нечетная

$\int\limits_{-a} f(x)dx = 0$, если $f(x)$ нечетная

.

6. $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. Вычислить интеграл

Ответ введите целым числом:

7. Вычислить интеграл $\int\limits_2^{11} 10x\sqrt{x-2}dx$.

Ответ введите целым числом:

8. Выберите верную запись формул интегрирования по частям в определенном интеграле

1) $\int\limits_a^b u(x)du(x) = u(x)v(x) - \int\limits_a^b v(x)du(x)$;

2) $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x)$;

3) $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta v(x)du(x)$;

4) $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u(x)dx$.

9. $\int\limits_1^e \ln xdx$. Вычислить

Ответ введите целым числом:

10. Вычислить $\int\limits_0^\pi x\cos xdx$.

Ответ введите целым числом с указанием знака (+,-) без пробела:

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Определенный интеграл

Если $F(x) + C$ - первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b) - F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x = a$ до $x = b$ называется определенным интегралом и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Основные свойства определенного интеграла

1.При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

Это свойство позволяет рассматривать интегралы, в которых верхний предел меньше нижнего.

2.Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx,$$

где k - постоянная величина.

3.Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

4. Если a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

$- \quad = \frac{1}{20}$

№1. Найти $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx$.

Решение. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx = \int_1^2 5x^4 dx + \int_1^2 2xdx - \int_1^2 8dx =$

$= x^5\Big|_1^2 + x^2\Big|_1^2 - 8x\Big|_1^2 = (2^5 - 1^5) + (2^2 - 1^2) - 8(2-1) = 26.$

№2 Найти $\int_0^1 e^{2x}dx.$

Решение. $\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) = 0{,}5(7{,}36 - 1) \approx 3{,}18.$

№3 Найти $\int_0^1 \frac{x^3dx}{5x^4+1}.$

Решение. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{5x^4+1} = \begin{vmatrix} t = 5x^4+1, \\ dt = 20x^3dx, \\ x^3dx = \frac{1}{20}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{20}\ln t = \frac{1}{20}\ln(5x^4+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{20}(\ln 6 \quad \ln 1) \qquad \ln 6.$

1

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Найти 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int_1^3 \left(2x^2 + \frac{4}{x}\right)dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\, dx$; 4) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$; 5) $\int_1^e \frac{3\ln^2 x dx}{x}$;

6.) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos x dx$

Типовые задачи.

Вычислить интеграл

1. $\int_1^2 \frac{3+x}{x}dx$, Ответ: $3\ln 2 \; 1$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx$, Ответ: $\frac{1}{3}$

Решить типовые задачи.

3. $\int_0^1 \sqrt{1-x}dx$, Ответ: $\frac{2}{3}$

4. $\int_1^2 x^2\ln x dx$, Ответ: $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$

5. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$, Ответ: $\frac{1}{2}$

6. $\int_{-2}^3 (2x^3 + x^2 - 5)dx$,

$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\sin x dx$,

7.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 106-152 (с. 277).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1(1-27), 2 (с. 232-233).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 6, пар. 6.6-6.9 (с. 228-245).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 11, пар. 80-85 (с. 209-226).

1. **Тема занятия № 28 и еѐ актуальность**. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции f(x) найти такую функцию F(x), производная которой была бы равна функции f(x), то есть $F'(x) = f(x)$. Восстановление функции по известной производной этой функции – одна из основных задач интегрального исчисления.

2. Учебные цели:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла
- решать некоторые задачи геометрии и физики с помощью определенного интеграла

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие определенного интеграла.
2)Свойства определенного интеграла.
3)Формула Ньютона-Лейбница.
4)Несобственные интегралы.
5)Приближенное вычисление определенных интегралов. Формула трапеций.

8. Вид занятия: практическое занятие.

9. Продолжительность занятия: 3 часа.

На изучение указанной выше темы, отведено 6 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

10. Оснащение:

10.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

10.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

11. Содержание занятия:

11.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Выберите среди приведенных выражений верно написанные свойства определенного интеграла, если f(x) и g(x) – интегрируемы на [a; b], [a; c], [c; b] k=const.

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a \frac{1}{f(x)}dx$; 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$;

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4) ;

5)

6)

2. Теорема о среднем значении определенного интеграла: если функция y=f(x) непрерывна на [a; b],

то найдется хотя бы одна точка с є [a; b], в которой выполняется равенство 1)

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$; 2) $$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$;

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(c)}{b-a}$$;

$$\int_a^b f(x)dx = c(f(b)-f(a))$$.

3. Формула Ньютона -Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

3)

4)

справедлива, если

4) $F'(x) = f(x)$;

5) $F(x)$ – непрерывна на $[a;b]$; $F'(x) = f(x)$;

6) $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$; $F'(x) = f(x)$;

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$.

4)

4. Укажите верное соответствие между функцией и ее свойством. Замена переменной в определенном интеграле может быть выполнена по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$, если $f(x)$, $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$

являются

Функция	Свойство	
$f(x)$;	1) непрерывная функция на $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(b)$	1. ;
$\varphi(t)$;	2) непрерывная функция на $[a;b]$;	
$\varphi'(t)$.	3) монотонная и непрерывная функция на $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(b)$.	

2.

3.

5. Выберите верные утверждения

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, если $f(x)$ -четная 1) ;

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,если $f(x)$-четная ;

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$,если $f(x)$-нечетная

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,если $f(x)$ нечетная .

$$\int_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}.$$

2)
3) ;

4)

9. Вычислить интеграл

Ответ введите целым числом:

10. Вычислить интеграл $\int_{2}^{11} 10x\sqrt{x-2}dx$.

Ответ введите целым числом:

11. Выберите верную запись формул интегрирования по частям в определенном интеграле

5) $\int_{a}^{b} u(x)du(x) = u(x)v(x) - \int_{a}^{b} v(x)du(x)$;

6) $\int_{a}^{b} u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)du(x)$;

7) $\int_{a}^{b} u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v(x)du(x)$;

8) $\int_{a}^{b} u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u(x)dx$.

11. $\int_{1}^{e} \ln xdx.$ Вычислить

Ответ введите целым числом:

12. Вычислить $\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Ответ введите целым числом с указанием знака (+,-) без пробела:

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Определенный интеграл

Если $F(x)+C$ - первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b)-F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$ называется определенным интегралом и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

Основные свойства определенного интеграла

1.При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Это свойство позволяет рассматривать интегралы, в которых верхний предел меньше нижнего.

2.Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

где k - постоянная величина.

3.Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

4. Если a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

$- \quad = \frac{1}{20}$

№1. Найти $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx$.

Решение. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx = \int_1^2 5x^4 dx + \int_1^2 2x dx - \int_1^2 8 dx =$

$= x^5 \Big|_1^2 + x^2 \Big|_1^2 - 8x \Big|_1^2 = (2^5 - 1^5) + (2^2 - 1^2) - 8(2-1) = 26.$

№2 Найти $\int_0^1 e^{2x} dx.$

Решение. $\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) = 0{,}5(7{,}36 - 1) \approx 3{,}18.$

№3 Найти $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{5x^4 + 1}.$

Решение. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{5x^4+1} = \left| \begin{array}{l} t = 5x^4 + 1, \\ dt = 20x^3 dx, \\ x^3 dx = \frac{1}{20} dt \end{array} \right| = \frac{1}{20} \ln t = \frac{1}{20} \ln(5x^4 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{20} (\ln 6 \quad \ln 1) \qquad \ln 6.$

1

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи.

Вычислить интеграл

Найти 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$; 2) $\int_1^3 \left(2x^2 + \frac{4}{x}\right) dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$; 4) $\int_0^1 \ln(x+1) dx$; 5) $\int_1^e \frac{3 \ln^2 x dx}{x}$;

6.) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$

Решить типовые задачи.

1. $\int_1^2 \frac{3+x}{x}dx$, Ответ: $3\ln 2+1$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$, Ответ: $\frac{1}{3}$

3. $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$, Ответ: $\frac{2}{3}$

4. $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$, Ответ: $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

5. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$, Ответ: $\frac{1}{2}$

6. $\int_{-2}^{3} \left(2x^3+x^2-5\right)dx$,

7. $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\,\sin x\,dx$,

3. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 106-152 (с. 277).

4. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1(1-27), 2 (с. 232-233).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приёмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

3. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 6, пар. 6.6-6.9 (с. 228-245).

4. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 11, пар. 80-85 (с. 209-226).

1. Тема занятия № 29 и еѐ актуальность. Несобственные интегралы от неограниченных функций и с бесконечными пределами.

Разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции f(x) найти такую функцию F(x), производная которой была бы равна функции f(x), то есть $F'(x) = f(x)$. Восстановление функции по известной производной этой функции – одна из основных задач интегрального исчисления.

2. Учебные цели:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла
- решать некоторые задачи геометрии и физики с помощью определенного интеграла

и овладеть способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:**

Вопросы для самоподготовки:

1)Понятие определенного интеграла.
2)Свойства определенного интеграла.
3)Формула Ньютона-Лейбница.
4)Несобственные интегралы.
5)Приближенное вычисление определенных интегралов. Формула трапеций.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Выберите среди приведенных выражений верно написанные свойства определенного интеграла, если f(x) и g(x) – интегрируемы на [a; b], [a; c], [c; b] k=const.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$;

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a \frac{1}{f(x)}dx$; 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$.

3)

4) ;

5)

6)

2. Теорема о среднем значении определенного интеграла: если функция y=f(x) непрерывна на [a; b], то найдется хотя бы одна точка c є [a; b], в которой выполняется равенство 1)

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$; 2) $\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$;

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(c)}{b-a}$$;

$$\int_a^b f(x)dx = c(f(b)-f(a))$$.

3. Формула Ньютона -Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

3)

4)

справедлива, если

7) $F'(x) = f(x)$;

8) $F(x)$ – непрерывна на $[a;b]$; $F'(x) = f(x)$;

9) $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$; $F'(x) = f(x)$;

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$.

4)

4. Укажите верное соответствие между функцией и ее свойством. Замена переменной в определенном интеграле может быть выполнена по формуле

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, если $f(x)$, $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$

являются

Функция	Свойство	
$f(x)$;	1) непрерывная функция на $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(b)$	1. ;
$\varphi(t)$;	2) непрерывная функция на $[a;b]$;	
$\varphi'(t)$.	3) монотонная и непрерывная функция на $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(b)$.	

2.

3.

5. Выберите верные утверждения

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$ -четная 1) ;

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если $f(x)$-четная ;

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$-нечетная

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если $f(x)$ нечетная .

$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

2)
3) ;

4)

12. Вычислить интеграл

Ответ введите целым числом:

13. Вычислить интеграл $\int_2^{11} 10x\sqrt{x-2}dx$.

Ответ введите целым числом:

14. Выберите верную запись формул интегрирования по частям в определенном интеграле

9) $\int_a^b u(x)du(x) = u(x)v(x) - \int_a^b v(x)du(x)$;

10) $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$;

11) $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v(x)du(x)$;

12) $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u(x)dx$.

13. Вычислить $\int_1^e \ln x dx.$

Ответ введите целым числом:

14. Вычислить $\int_0^\pi x\cos x dx.$

Ответ введите целым числом с указанием знака (+,-) без пробела:

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Определенный интеграл

Если $F(x)+C$ - первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b)-F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$ называется определенным интегралом и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Основные свойства определенного интеграла

1.При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Это свойство позволяет рассматривать интегралы, в которых верхний предел меньше нижнего.

2.Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

где k - постоянная величина.

3.Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

4. Если a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

$$- \quad = \frac{1}{20}$$

№1. Найти $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx$.

Решение. $$\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx = \int_1^2 5x^4 dx + \int_1^2 2x dx - \int_1^2 8dx =$$

$$= x^5\Big|_1^2 + x^2\Big|_1^2 - 8x\Big|_1^2 = (2^5 - 1^5) + (2^2 - 1^2) - 8(2-1) = 26.$$

№2 Найти $\int_0^1 e^{2x} dx.$

Решение. $$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) = 0{,}5(7{,}36 - 1) \approx 3{,}18.$$

№3 Найти $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{5x^4 + 1}.$

Решение. $$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{5x^4 + 1} = \left| \begin{array}{l} t = 5x^4 + 1, \\ dt = 20x^3 dx, \\ x^3 dx = \frac{1}{20} dt \end{array} \right| = \frac{1}{20}\ln t = \frac{1}{20}\ln(5x^4 + 1)\Big|_0^1 = \frac{1}{20}(\ln 6 \quad \ln 1) \qquad \ln 6.$$

1

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи.

Вычислить интеграл

Найти 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$; 2) $\int_1^3 \left(2x^2 + \frac{4}{x}\right)dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\, dx$; 4) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$; 5) $\int_1^e \frac{3\ln^2 x dx}{x}$;

6.) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$

Решить типовые

1. $\int\limits_1^2 \frac{3+x}{x}\,dx$, Ответ: $3\ln 2+1$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$, Ответ: $\frac{1}{3}$

3. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$, Ответ: $\frac{2}{3}$

4. $\int\limits_1^2 x^2\ln x\,dx$, Ответ: $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

5. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$, Ответ: $\frac{1}{2}$

6. $\int\limits_{-2}^3 \left(2x^3+x^2-5\right)dx$,

7. $\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\,\sin x\,dx$,

5. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 106-152 (с. 277).

6. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1(1-27), 2 (с. 232-233).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приёмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

5. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб.заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 6, пар. 6.6-6.9 (с. 228-245).

6. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. гл. 11, пар. 80-85 (с. 209-226).

1. **Тема занятия № 31 и еѐ актуальность**. Геометрические приложения определенного интеграла. Применение определенного интеграла для решения прикладных задач.

Применение определенного интеграла во многом облегчает решение ряда задач в таких разных областях знания как механика, биология и экономика.

2. Учебные цели:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла
- решать некоторые задачи геометрии и физики с помощью определенного интеграла

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1) Вычисление работы переменной силы.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 6 академических часов по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

Тест.

1). Производная логарифмической функции f(x)=*ln* x равна

1 1 x

1. $x\sqrt{}$; 2. $\sqrt{x\ln x}$; 3. $\frac{}{x}$; 4. $\frac{}{\ln x}$; 5. $\frac{}{\ln x}$

2). Дифференциал функции $y=6\sin(2x)$ равен

1. $6\cos(2x)dx$; 2. $12\sin x dx$; 3. $6\cos(2x)dx$; 4. $12\cos(2x)dx$; 5. $-12\sin(2x)dx$

3). Интеграл, который вычисляется способом непосредственного интегрирования

1. $\int x\sin x dx$; 2 $\int xe^x dx$; 3. $\int (x^2+1)dx$; 4. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)}$; 5. $\int \ln x dx$

4). Производная от неопределенного интеграла равна

1. подынтегральной функции; 2. константе С; 3. подынтегральному выражению
4. единице; 5. первообразной подынтегральной функции

5). Интеграл $\int \ln x dx / x$ равен

1. $x+c$; 2. $\ln|x|+c$; 3. x^2+c; 4. $0.5\ln|x|+c$; 5. $0.5\ln^2 x+c$

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Задача. Скорость изменения силы тока в цепи обратно пропорциональна квадрату времени. Приняв коэффициент пропорциональности равным –1,12 установить закон изменения силы тока, если при t=0,4 мс значение силы тока равно 3,2 мА.

Типовые задачи.

1) Вычислить работу, произведенную при сжатии пружины на 0,02 м, если известно, что для укорочения ее на 0,003 м нужно приложить силу в 9 н.

Ответ: 0,6 Дж.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 171-178 (с. 282).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 8-20 (с. 233-234).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с., глава 6, п. 6.11 (с. 252-259).
2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. , глава 11, пар. 86 (с. 226-234).

Тема занятия № 32 и её актуальность. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Общее и частное решения дифференциального уравнения.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.

1. Учебные цели:

- научиться решать некоторые типы дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- виды дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать дифференциальные уравнения;

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Понятие о дифференциальных уравнениях.
2. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка, их решение методом вариации произвольного постоянного и методом Бернулли.
6. Уравнение в полных дифференциалах, его определение и решение.
7. Решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

4. Вид занятия: практическое занятие. **5. Продолжительность занятия:** 3 часа

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения $dy/dx=x$

1.$y=x+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$y=x^3/3+c$; 4.$y=-x+c$

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при x=1, y=0

1.$y=x^2+1$; 2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$; 4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка

1.ydy-xdx=0; 2.xdy-ydx=xdx; 3.$xdy=(y+3x^2)dx$; 4.$dy=x^2dx$ 4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка

1.dy-xdx=0; 2.xdy-ydx=ydy; 3.$xdy-ydx=x^3dx$; 4.$4dy-x^3dx=0$

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=2x-1/x

1.$y=x^2+x+c$; 2.y=2x-lnx+c; 3.$y=x^2+\ln x+c$; 4.$y=x^{2-}\ln x+c$

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения y``=2x+1

1.$y=x^2+x+c$; 2.$y=x^3+c_1x+c_2$; 3.$y=x^3/3+x^2/2+c_1x+c_2$; 4.$x^3+c_1x^2+c_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения $dy/y^2=xdx$ имеет вид

1.$-1/y=x^2/2+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$1/y=x^2/2+c$; 4.$-1/y=x^2+c$ Ответы на тесты:

1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy' = 4$ - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; $y'' + xy' + 5y = 1 - x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + \phi(y)dy = 0$, где $f(x)$ и $\phi(x)$ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx = -\phi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух ^{2}, $dy\ dx$ - уравнения с разделенными дифференциалов. Например, $xdx + ydy = 0$, $\frac{2dy}{y} = \frac{3dx}{x}$

переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$, $F(y)$ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int xdx + \int ydy = C; \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C; \quad x^2 + y^2 = 2C.$$

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$= (x^2 - 1)dx$, если $y = \ldots$ $=$ $=$

Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} + 1 + C$, откуда $C = \frac{1}{4}$. Итак, получаем ответ:

$y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{4}$ 3.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения dy 4, при x 1.

Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x^2 + 1)(y^2 - 1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{ydy}{y^2-1} = 0$.

Теперь переменные разделены; интегрируя, находим $\int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{ydy}{y^2-1} = C_1$; $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\ln C$.

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим $\ln(x^2 + 1)(y^2 - 1) = \ln C$, откуда $(x^2 + 1)(y^2 - 1) = C$.

Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1)$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$

2)xdy-ydx=xdx Ответ: y=x(lnIxI+c)

3)(2x-y)dx-xdy=0 Ответ: $x^2-xy=c$

4)$xy`=y-xe^{y/x}$ Ответ: y=-xlnln(cx)

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1)y`+2xy=2x Ответ: $y=1+ce^{-x\cdot x}$

2)$y`+3y=e^{2x}$ Ответ: $y=1/5e^{2x}+ce^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1)y``=x Ответ: $y=x^3/6+c_1x+c_2$

2)y``-3y`/x=x Ответ: $y=c_1x^4/4-x^3/3+c_2$

3)$yy``-2y`^2=0$ Ответ: $y=-1/(c_1x+c_2)$

1. $+ xdy \quad 2ydx = 0$ dy

2. $\frac{}{2x} + ydx\ 0 =$

3. $' = x^2dy\ y^2dx$

$' =$

4. $y \quad x$ 5. $yy^2 \cos x$

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $y'\ y^2 = \cos x$; б) $y'\ tgx\ tg\ y$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а) $2y'\ x\sqrt{y}$, если $y = 1$ при $x = 4$;

б) $2\sqrt{y}\ y'$, если $y = 1$ при $x = 0$;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:

1. $y' = \frac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

Найти решение однородных дифференциальных уравнений:

1. $xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - \frac{x^2}{y}$. **2.** $x^3y' = y(y^2 + x^2)$.

Задание 3

Найти решение линейных дифференциальных уравнений:

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3 \ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.1, 9.2 (с. 431-454).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 95-98 (с. 255-264).

1. **Тема занятия № 33 и eѐ актуальность**. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.

2. Учебные цели:

- научиться решать некоторые типы дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- виды дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать дифференциальные уравнения;

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

6. Понятие о дифференциальных уравнениях.
7. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
8. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
9. Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка.
10. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка, их решение методом вариации произвольного постоянного и методом Бернулли.

6.Уравнение в полных дифференциалах, его определение и решение.

7. Решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение указанной выше темы, отведено 4 академических часа по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

8. Оснащение:

8.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

8.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

9. Содержание занятия:

9.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=x
1.$y=x+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$y=x^3/3+c$; 4.$y=-x+c$

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при x=1, y=0
1.$y=x^2+1$; 2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$; 4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка
1.ydy-xdx=0; 2.xdy-ydx=xdx; 3.$xdy=(y+3x^2)dx$; 4.$dy=x^2dx$ 4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка
1.dy-xdx=0; 2.xdy-ydx=ydy; 3.$xdy-ydx=x^3dx$; 4.$4dy-x^3dx=0$

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=2x-1/x
1.$y=x^2+x+c$; 2.y=2x-lnx+c; 3.$y=x^2+\ln x+c$; 4.$y=x^{2-}\ln x+c$

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения y``=2x+1
1.$y=x^2+x+c$; 2.$y=x^3+c_1x+c_2$; 3.$y=x^3/3+x^2/2+c_1x+c_2$; 4.$x^3+c_1x^2+c_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения $dy/y^2=xdx$ имеет вид
1.$-1/y=x^2/2+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$1/y=x^2/2+c$; 4.$-1/y=x^2+c$ Ответы на тесты:
1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy' = 4$ - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; $y'' + xy' + 5y = 1 + x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx = -\varphi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Например, $xdx + ydy = 0$, $\frac{2dy}{y} = \frac{3x\,dx}{x}$ - уравнения с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$, $F(y)$ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int xdx + \int ydy = C;\quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C;\quad x^2 + y^2 = 2C.$$

2 2

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Имеем $\int dy = \int (x^2-1)dx$; $y=\frac{x^3}{3}-x+C$; $4=\frac{1}{3}+1+C$, откуда $C=\frac{14}{3}$. Итак, получаем ответ:

$y=\frac{x^3}{3}-x+\frac{14}{3}$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy=(x^2-1)dx$, $y=4$, при $x=1$.

Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x^2+1)(y^2-1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$.

Теперь переменные разделены; интегрируя, находим $\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=C_1$; $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\frac{1}{2}\ln C$.

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим $\ln(x^2+1)(y^2-1)=\ln C$, откуда $(x^2+1)(y^2-1)=C$.

Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1)$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$

2)xdy-ydx=xdx Ответ: y=x(lnIxI+c)

3)(2x-y)dx-xdy=0 Ответ: $x^2-xy=c$

4)$xy`=y-xe^{y/x}$ Ответ: y=-xlnln(cx)

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1)y`+2xy=2x Ответ: $y=1+ce^{-x\cdot x}$

2)$y`+3y=e^{2x}$ Ответ: $y=1/5e^{2x}+ce^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1)y``=x Ответ: $y=x^3/6+c_1x+c_2$

2)y``-3y`/x=x Ответ: $y=c_1x^4/4-x^3/3+c_2$

3)$yy``-2y`^2=0$ Ответ: $y=-1/(c_1x+c_2)$

4. $xdy + 2ydx = 0$ dy

5. $\frac{}{2x} + ydx = 0$

$=$

$' =$

$' =$

6. $x^2 dy\ y\ ^2 dx$

4. $y \quad x$ 5. $yy^2 \cos x$

Решить типовые задачи.

3. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

4. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а)

$y'\ y^2 = \cos x$; б) $y'\ tgx\ tg = y$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а)

$2y'\ x\ \sqrt{y}$, если $y\ 1$ при $x = 4$; =

б) $2\sqrt{y}\ y' =$, если $y = 1$ при $x\ 0$;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:

1. $y' = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

Найти решение однородных дифференциальных уравнений:

1. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y}$. **2.** $x^3 y' = y\,(y^2 + x^2)$.

Задание 3

Найти решение линейных дифференциальных уравнений:

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3 \ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

3. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.1, 9.2 (с. 431-454).

4. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 95-98 (с. 255-264).

1. **Тема занятия № 34 и еѐ актуальность**. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.

2. **Учебные цели**:

- научиться решать некоторые типы дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- виды дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать дифференциальные уравнения;

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

11. Понятие о дифференциальных уравнениях.
12. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
13. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
14. Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка.
15. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка, их решение методом вариации произвольного постоянного и методом Бернулли.

6.Уравнение в полных дифференциалах, его определение и решение.

7. Решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения $dy/dx=x$

1.$y=x+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$y=x^3/3+c$; 4.$y=-x+c$

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при $x=1$, $y=0$

1.$y=x^2+1$;   2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$;   4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка

1.$ydy-xdx=0$;   2.$xdy-ydx=xdx$;   3.$xdy=(y+3x^2)dx$;   4.$dy=x^2dx$ 4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка

1.$dy-xdx=0$;   2.$xdy-ydx=ydy$;   3.$xdy-ydx=x^3dx$;   4.$4dy-x^3dx=0$

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения $dy/dx=2x-1/x$

1.$y=x^2+x+c$;   2.$y=2x-\ln x+c$;   3.$y=x^2+\ln x+c$;   4.$y=x^{2-}\ln x+c$

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения $y``=2x+1$

1.$y=x^2+x+c$;   2.$y=x^3+c_1x+c_2$;   3.$y=x^3/3+x^2/2+c_1x+c_2$;   4.$x^3+c_1x^2+c_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения $dy/y^2=xdx$ имеет вид

1.$-1/y=x^2/2+c$;   2.$y=x^2/2+c$;   3.$1/y=x^2/2+c$;   4.$-1/y=x^2+c$ Ответы на тесты:

1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy' = 4$ - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; $y'' - xy' + 5y = 1 + x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx = -\varphi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Например, $xdx + ydy = 0$, $\frac{2ydy}{y} = \frac{3x\,dx}{x}$ - уравнения с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(y)$, $\Phi(y)$ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int xdx + \int ydy = C;\quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C;\quad x^2 + y^2 = 2C.$$

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$= (x^2-1)dx$, если $y = \ldots$

Имеем $\int dy = \int (x^2-1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} + 1 + C$, откуда $C = \frac{1}{4}$. Итак, получаем ответ: $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{4}$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения dy 4, при x 1.
Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y^2-1)dx + y(x^2+1)dy = 0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x^2+1)(y^2-1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{ydy}{y^2-1} = 0$.

Теперь переменные разделены; интегрируя, находим $\int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{ydy}{y^2-1} = C_1$; $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \frac{1}{2}\ln C$.

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим $\ln(x^2+1)(y^2-1) = \ln C$, откуда $(x^2+1)(y^2-1) = C$.
Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1)$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$
2)$xdy-ydx=xdx$ Ответ: $y=x(\ln|x|+c)$
3)$(2x-y)dx-xdy=0$ Ответ: $x^2-xy=c$
4)$xy`=y-xe^{y/x}$ Ответ: $y=-x\ln\ln(cx)$

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1)$y`+2xy=2x$ Ответ: $y=1+ce^{-x\cdot x}$
2)$y`+3y=e^{2x}$ Ответ: $y=1/5e^{2x}+ce^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1)$y``=x$ Ответ: $y=x^3/6+c_1x+c_2$
2)$y``-3y`/x=x$ Ответ: $y=c_1x^4/4-x^3/3+c_2$
3)$yy``-2y`^2=0$ Ответ: $y=-1/(c_1x+c_2)$

7. $+xdy \; 2 = ydx$ $0\,dy$

8. $\frac{}{2x} + ydx\,0 =$

9. $, = x^2dy\,y^2dx$

$, =$

4. y x 5. $yy^2 \cos x$

Решить типовые задачи.

5. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

6. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а)

$y' y^2 = \cos x$; б) $y'\, tgx\, tgy$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а)

$2y' \, x \sqrt{y}$, если $y = 1$ при $x = 4$; =

б) $2\sqrt{y}\, y'$, если $y = 1$ при $x = 0$;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приёмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:

1. $y' = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

Найти решение однородных дифференциальных уравнений:

1. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y}$. **2.** $x^3 y' = y\,(y^2 + x^2)$.

Задание 3

Найти решение линейных дифференциальных уравнений:

1. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3 \ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

5. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.1, 9.2 (с. 431-454).

6. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 95-98 (с. 255-264).

1. **Тема занятия № 36 и еѐ актуальность**. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.
2. **Учебные цели**:

- научиться решать некоторые типы дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- виды дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать дифференциальные уравнения;

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

16. Понятие о дифференциальных уравнениях.
17. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
18. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
19. Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка.
20. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка, их решение методом вариации произвольного постоянного и методом Бернулли.

6.Уравнение в полных дифференциалах, его определение и решение.

7. Решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=x

1.$y=x+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$y=x^3/3+c$; 4.$y=-x+c$

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при x=1, y=0

1.$y=x^2+1$; 2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$; 4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка

1.ydy-xdx=0; 2.xdy-ydx=xdx; 3.$xdy=(y+3x^2)dx$; 4.$dy=x^2dx$

4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка

1.dy-xdx=0; 2.xdy-ydx=ydy; 3.$xdy-ydx=x^3dx$; 4.$4dy-x^3dx=0$

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=2x-1/x

1.$y=x^2+x+c$; 2.y=2x-lnx+c; 3.$y=x^2+\ln x+c$; 4.$y=x^{2-}\ln x+c$

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения y``=2x+1

1.$y=x^2+x+c$; 2.$y=x^3+c_1x+c_2$; 3.$y=x^3/3+x^2/2+c_1x+c_2$; 4.$x^3+c_1x^2+c_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения $dy/y^2=xdx$ имеет вид

1.$-1/y=x^2/2+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$1/y=x^2/2+c$; 4.$-1/y=x^2+c$

Ответы на тесты:

1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy' = 4$ - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; $y'' + xy' + 5y = 1 + x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx = -\varphi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Например, $xdx + ydy = 0$, $\frac{2}{y}dy = \frac{3}{x}dx$ - уравнения с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(y)$, $\Phi(y)$ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int xdx + \int ydy = C;\quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C;\quad x^2 + y^2 = 2C.$$

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$= (x^2 - 1)dx$, если y = =

Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} + 1 + C$, откуда $C = \frac{1}{4}$. Итак, получаем ответ:

$y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{4}$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения dy 4, при x 1.

Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x^2 + 1)(y^2 - 1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{ydy}{y^2-1} = 0$.

Теперь переменные разделены; интегрируя, находим $\int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{ydy}{y^2-1} = C_1$; $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \frac{1}{2}\ln C$.

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим $\ln(x^2+1)(y^2-1) = \ln C$, откуда $(x^2+1)(y^2-1) = C$.

Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1)$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$

2)xdy-ydx=xdx Ответ: y=x(lnIxI+c)

3)(2x-y)dx-xdy=0 Ответ: x^2-xy=c

4)$xy`=y-xe^{y/x}$ Ответ: y=-xlnln(cx)

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1)y`+2xy=2x Ответ: $y=1+ce^{-x\cdot x}$

2)$y`+3y=e^{2x}$ Ответ: $y=1/5e^{2x}+ce^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1)y``=x Ответ: $y=x^3/6+c_1x+c_2$

2)y``-3y`/x=x Ответ: $y=c_1x^4/4-x^3/3+c_2$

3)$yy``-2y`^2=0$ Ответ: $y=-1/(c_1x+c_2)$

10. $xdy + 2ydx = 0$ dy

11. $\frac{}{2x} + ydx = 0$ =

12. $' = x^2dy \; y^2dx$ =

$' =$

4. $y \quad x$ 5. $yy^{2} \cos x$

Решить типовые задачи.

7. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

8. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а)

$y' \; y^{2} = \cos x$; б) $y' \; tgx \, tg = y$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а)

$2y' \; x \; \sqrt{y}$, если $y = 1$ при $x = 4$; =

б) $2\sqrt{y} \; y' =$, если $y = 1$ при $x = 0$;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:

1. $y' = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

Найти решение однородных дифференциальных уравнений:

1. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y}$. **2.** $x^3 y' = y\,(y^2 + x^2)$.

Задание 3

Найти решение линейных дифференциальных уравнений:

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3 \ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

7. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.1, 9.2 (с. 431-454).

8. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 95-98 (с. 255-264).

1. **Тема занятия № 37 и еѐ актуальность**. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами.
   Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.
2. **Учебные цели**:

- научиться решать некоторые типы дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Для формирования профессио0нальных компетенций обучающийся должен **знать:**

- виды дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать дифференциальные уравнения;

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

21. Понятие о дифференциальных уравнениях.
22. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
23. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
24. Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка.
25. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка, их решение методом вариации произвольного постоянного и методом Бернулли.

6.Уравнение в полных дифференциалах, его определение и решение.

7. Решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1 уровень

1.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=x

1.$y=x+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$y=x^3/3+c$; 4.$y=-x+c$

2.Укажите частное решение дифференциального уравнения $dy/dx=3x^2$ при x=1, y=0

1.$y=x^2+1$; 2.$y=x^3$; 3.$y=x^3-1$; 4.$y=x^2-1$

3.Укажите линейное дифференциальное уравнение первого порядка

1.ydy-xdx=0; 2.xdy-ydx=xdx; 3.$xdy=(y+3x^2)dx$; 4.$dy=x^2dx$ 4.Укажите однородное дифференциальное уравнение первого порядка

1.dy-xdx=0; 2.xdy-ydx=ydy; 3.$xdy-ydx=x^3dx$; 4.$4dy-x^3dx=0$

5.Укажите общее решение дифференциального уравнения dy/dx=2x-1/x

1.$y=x^2+x+c$; 2.y=2x-lnx+c; 3.$y=x^2+\ln x+c$; 4.$y=x^{2-}\ln x+c$

6.Укажите общее решение дифференциального уравнения y``=2x+1

1.$y=x^2+x+c$; 2.$y=x^3+c_1x+c_2$; 3.$y=x^3/3+x^2/2+c_1x+c_2$; 4.$x^3+c_1x^2+c_2$

7.Общий интеграл дифференциального уравнения $dy/y^2=xdx$ имеет вид

1.$-1/y=x^2/2+c$; 2.$y=x^2/2+c$; 3.$1/y=x^2/2+c$; 4.$-1/y=x^2+c$ Ответы на тесты:

1.2, 2.3, 3.3, 4.2, 5.4, 6.3, 7.1

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения. Решение, содержащее производную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy'=4$ - дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, - первый; $y''+xy'+5y=1+x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx+\varphi(y)dy=0$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ - данные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx=-\varphi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Например, $xdx+ydy=0$, $\frac{2dy}{y}=\frac{3dx}{x}$ - уравнения с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f(x)F(y)dx+\varphi(x)\Phi(y)dy=0$, где $f(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$, $F(y)$ - заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

№1. Решить уравнение $xdx+ydy=0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int xdx+\int ydy=C;\quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C;\quad x^2+y^2=2C.$$

Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$= (x^2-1)dx$, если $y = =$

Имеем $\int dy = \int (x^2-1)dx$; $y=\frac{x^3}{3}-x+C$; $4=\frac{1}{3}+1+C$, откуда $C=\frac{1}{4}$. Итак, получаем ответ:

$y=\frac{x^3}{3}-x+\frac{1}{4}$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения dy 4, при x 1.

Решение.

3 3

№3. Решить уравнение $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x^2+1)(y^2-1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$.

Теперь переменные разделены; интегрируя, находим $\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=C_1$; $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\frac{1}{2}\ln C$.

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим $\ln(x^2+1)(y^2-1)=\ln C$, откуда $(x^2+1)(y^2-1)=C$.

Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя.

Типовые задачи. 1.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

1) $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ Ответ: $x^2+y^2=cx$
2) $xdy-ydx=xdx$ Ответ: $y=x(\ln|x|+c)$
3) $(2x-y)dx-xdy=0$ Ответ: $x^2-xy=c$
4) $xy`=y-xe^{y/x}$ Ответ: $y=-x\ln\ln(cx)$

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

1) $y`+2xy=2x$ Ответ: $y=1+ce^{-x\cdot x}$
2) $y`+3y=e^{2x}$ Ответ: $y=1/5e^{2x}+ce^{-3x}$

3.Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

1) $y``=x$ Ответ: $y=x^3/6+c_1x+c_2$
2) $y``-3y`/x=x$ Ответ: $y=c_1x^4/4-x^3/3+c_2$
3) $yy``-2y`^2=0$ Ответ: $y=-1/(c_1x+c_2)$

13. $xdy + 2ydx = 0$

14. $\frac{dy}{2x} + ydx = 0$

15. $x^2dy = y^2dx$

4. $y \quad x$ 5. $yy^2 \cos x$

Решить типовые задачи.

9. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-39 (с. 502-505).

10. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 1-5 (с. 272-273).

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $y' y^2 = \cos x$; б) $y' \, tgx \, tg y$;

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения: а) $2y' \, x \sqrt{y}$, если $y = 1$ при $x = 4$;

б) $2\sqrt{y} \, y'$, если $y = 1$ при $x = 0$;

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия. Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Задание 1

Найти решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимся переменными:

1. $y' = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$. **2.** $xy(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

Задание 2

Найти решение однородных дифференциальных уравнений:

1. $xy' \cos \dfrac{y}{x} = y \cos \dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y}$. **2.** $x^3 y' = y\,(y^2 + x^2)$.

Задание 3

Найти решение линейных дифференциальных уравнений:

1. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$. **2.** $xy' - 2y = x^3 \ln x$.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

9. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.1, 9.2 (с. 431-454).

10. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 95-98 (с. 255-264).

1. **Тема занятия № 38 и еѐ актуальность**. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных научных законов, в описания конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решение соответствующих дифференциальных уравнений.

2. **Учебные цели**:

- изучение видов дифференциальных уравнений и методов их решения;
- умение применять теорию дифференциальных уравнений при решении типовых задач;

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- виды дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- решать дифференциальные уравнения;
- составлять и решать дифференциальные уравнения в задачах медико-биологического содержания.

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

7)Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение данной темы, отведено 4 академических часа по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1.Дано дифференциальное уравнение y``+2y`+5y=0. Тогда его общим решением является

1.$e^{-x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)$; 2.$e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$; 3.$e^{x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

Ответ: 1.2

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

Применение дифференциальных уравнений для решения физических, химических и биологических задач.

Задача о скорости размножения бактерий

Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий. В течение 3 часов их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 часов?

Решение. Пусть x — количество бактерий в момент t. Тогда согласно условию

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Отсюда $x = ce^{kt}$. Из условия известно, что $x|_{t=0} = 100$. Значит,

$$C = 100, \quad x = 100e^{kt}.$$

Из дополнительного условия $x|_{t=3} = 200$. Тогда $200 = 100e^{3k}$, $2 = e^{3k}$, $e^k = 2^{1/3}$.

Искомая функция:

$$x = 100 \cdot 2^{t/3}.$$

Значит, при $t = 9$ $x = 800$, т. е. в течение 9 часов количество бактерий увеличилось в 8 раз.

Задача об увеличении количества фермента

В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его начальному количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение часа удвоилось. Найти зависимость $x(t)$.

Решение. По условию дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

отсюда $x = ce^{kt}$.

Но $x\,|_{t=0} = a$. Значит, $C = a$, и тогда $x = ae^{kt}$.

Известно также, что $x\,|_{t=1} = 2a$.

Следовательно, $2a = ae^k$, $e^k = 2 \Rightarrow x(t) = a2^t$.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Задание 1. Решить задачу составив дифференциальное уравнение

Задача о радиоактивном распаде

Скорость распада Ra (радия) в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найти закон радиоактивного распада Ra, если известно, что в начальный момент имелось m_0 Ra и период полураспада Ra равен 1590 лет.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

1. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1) 2y``-5y`+2y=0 Ответ: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{x/2}$

2) y``-8y`+16y=0 Ответ: $y=e^{4x}(c_1+c_2x)$

3) $y``+y=0$ Ответ: $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ 4) $y``+8y`+25y=$ Ответ: $y=e^{-4x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$ 2. Найти частное решение:

1) $y``+y`-2y=0$ при $y(0)=1$, $y`(0)=0$. Ответ: $y=2/3e^{x}+1/3e^{-2x}$

2) $y``-2y`+y=0$ при $y(0)=0$, $y`(0)=1$. Ответ: $y=xe^{x}$

3. Наэлектризованное изолированное тело вследствие несовершенства изоляции постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда пропорциональна его величине. В начальный момент времени величина заряда равна 100 Кл, а по истечении 10 мин.- 50 Кл. Определить величину заряда через 20 мин. Ответ: q=25 Кл.

4. Тело температурой 25˚С погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0˚С. Зная, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды, определить, за какое время тело охладится до 10˚С, если за 20 мин. оно охлаждается до 20˚С.

Ответ: 82 мин.

5. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 мг препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме после 2 часа? Ответ: 25 мг.

6. Популяция бактерий увеличивается таким образом, что удельная скорость роста в момент t (час) составляет величину 1/(1+2t). Допустим, что начальной популяции соответствует x(0)=1000. Какой будет популяция после 4 часов роста? После 12 часов?

Ответ: 3000; 5000.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 40-85 (с. 505-508).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. № 6,7 (с. 273-274), 1-19 (с. 295-297)

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 9, пар. 9.3-9.6 (с. 454-502).

2. Основы высшей математики: учебник. Лобоцкая, Н. Л. - 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М.: Альянс, 2015. - 479 с. глава 13, пар. 99-100 (с. 265-272).

1. Тема занятия № 39 и её актуальность. Ряды. Числовые ряды. Функциональные ряды.

Ряды являются мощным средством изучения функций и сильным вычислительным аппаратом, позволяющим находить их значения, вычислять интегралы и решать другие прикладные задачи. Во многих случаях точное выполнение указанных математических операций оказывается весьма затруднительным или невозможным. В этих случаях можно получить приближенное решение при помощи рядов с любой, достаточной для практического использования, точностью. Ряды представляют собой простой и совершенный инструмент математического анализа, в том числе, и для решений дифференциальных уравнений. Поэтому знакомство обучающихся с теорией рядов – обязательная часть высшего образования. Без теории рядов невозможно представить дифференциальное и интегральное исчисления. Ряды играют большую роль в экономике, инженерии, геодезии, химии, физике, астрономии, биологии, архитектуре, эстетике, теории музыки, криптографии и т.д.

2. Учебные цели:

- изучение основных понятий числовых рядов.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- основные понятия и задачи теории рядов;
- необходимый и достаточные признаки сходимости рядов; - основные методы разложения в ряд Фурье.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- **уметь** исследовать **ряды** на сходимость;

- находить область сходимости

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов. **3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы:** Вопросы для самоподготовки:

1. Числовые ряды.
2. Основные свойства рядов.
3. Положительные ряды.
4. Знакочередующиеся ряды.
5. Абсолютная и условная сходимости.
6. Ряды с комплексными членами.
7. Функциональные ряды. Область их сходимости.
8. Равномерная сходимость функционального ряда.
9. Свойства равномерно сходящихся рядов.

4. **Вид занятия**: практическое занятие. **5. Продолжительность занятия:** 3 часа

На изучение данной темы, отведено 4 академических часа по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

1. Дайте определения сходящегося и расходящегося рядов. 2.Исследуйте сходимость ряда, составленного из членов геометрической прогрессии. Приведите примеры.

3.Исследуйте сходимость ряда Дирихле. Приведите при- меры.

4.Необходимый признак сходимости ряда.

5.Можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$?

6.Является ли необходимым для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ условие

а) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 1$; б) не все члены ряда – числа u_n – равны 1;

в) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$; г) не все члены ряда – числа u_n – равны 0?

7.Верно ли, что

а) если ряд сходится, то его частичные суммы ограничены;

б) если частичные суммы ряда ограничены, то ряд сходится?

8.Признаки сравнения рядов с положительными членами.

Приведите примеры применения этих признаков.

9.Признак Даламбера сходимости знакоположительных рядов. Приведите пример применения этого признака.

10.Радикальный признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Приведите примеры применения этого признака.

11.Интегральный признак Коши сходимости ряда. Приведите примеры применения этого признака.

12.Существует ли ряд, который

а) по признаку Коши сходится, а по признаку Даламбера расходится?

б) по признаку Даламбера расходится, а по интегральному признаку сходится?

в) по признаку Даламбера сходится, а по признаку Коши расходится?

13.Дайте определение знакопеременного ряда, его условной и абсолютной сходимости. Приведите примеры абсолютно и условно сходящихся рядов.

14.Следует ли сходимость знакопеременного ряда из его абсолютной сходимости?

15.Дайте определение знакочередующегося ряда, его условной и абсолютной сходимости. Приведите примеры абсолютно и условно сходящихся рядов.

16.Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Приведите примеры его применения.

17.Верно ли для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, что

а) если ряд абсолютно сходится, то он сходится и условно? б) если ряд сходится условно, то он не сходится абсолютно? в) если ряд сходится абсолютно, то является сходящимся?

18.Верно ли, что если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ сходится, то $u_n \to 0$ (при $n \to \infty$) монотонно?

19.Верно ли для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, что

а) если последовательность u_n монотонна, то ряд сходится? б) если $u_n \to 0$ (при $n \to \infty$), то ряд сходится? в) если $u_n \to 0$ (при $n \to \infty$) монотонно, то ряд сходится условно? г) если $u_n \to 0$ (при $n \to \infty$) монотонно, то ряд сходится?

20.Верно ли для знакопеременного ряда, что а) ряд сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся два ряда – ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов? б) если ряд сходится условно, то расходятся два ряда – ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов?; в) если один из двух рядов (с положительными членами и отрицательными членами) сходится, а другой – расходится, то исходный ряд расходится? г) если ряд сходится условно, то ряд из его положительных членов сходится?

21.Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$, если

а) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся? б) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходятся? в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится?

22.Из того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ сходится, следует ли, что

а) оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся? б) оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходятся? в) один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, а другой расходится?

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

Пример 1. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+8n}{15n^2-2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n n^4}{n!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)}$

Решение.

а) Предел общего члена ряда $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится; б) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Предел общего члена ряда $\lim_{n\to\infty} u_n = e$ (второй замечательный предел), необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится. в) – гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Предел его общего члена $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, необходимый признак сходимости выполняется, ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся, т.е. вопрос о сходимости ряда остается открытым. Из вышесказанного известно, что этот ряд расходится, но необходимый признак сходимости это утверждение не доказывает. г)

Найдем предел общего члена ряда: $\lim_{n\to\infty} u_n$ – получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой следует разделить числитель и знаменатель на переменную в наивысшей из участвующих в выражении степеней (в данном случае и в числителе, и в знаменателе старшая степень переменной равна 2):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+8n}{15n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n^2+8n)/n^2}{(15n^2+2)/n^2}=\frac{1}{3}\neq 0$$

необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится. д) факториал растёт быстрее, чем любая показательная или степенная последовательность, или многочлен, или произведение любого количества показательных и степенных последовательностей (случай в нашем примере). Таким образом, в нашем примере д) предел общего члена ряда $\lim_{n\to\infty} u_n$, т.к. n! более высокого порядка роста, чем $7^n n^4$. Необходимый признак сходимости выполняется, вопрос о сходимости ряда остается открытым. е) предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)'}{(\ln(n+1))'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n+1}}=\infty.$$

Мы применили правило Лопиталя. Необходимый признак сходимости не выполнен, ряд расходится.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 1-30 (с. 427-430).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий.

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. , глава 8, пар. 8.1-8.2 (с. 377-395).

1. Тема занятия № 30 и её актуальность. Степенные ряды. Тригонометрические ряды. Ряды Тейлора.

Ряды являются мощным средством изучения функций и сильным вычислительным аппаратом, позволяющим находить их значения, вычислять интегралы и решать другие прикладные задачи. Во многих случаях точное выполнение указанных математических операций оказывается весьма затруднительным или невозможным. В этих случаях можно получить приближенное решение при помощи рядов с любой, достаточной для практического использования, точностью. Ряды представляют собой простой и совершенный инструмент математического анализа, в том числе, и для решений дифференциальных уравнений. Поэтому знакомство обучающихся с теорией рядов – обязательная часть высшего образования. Без теории рядов невозможно представить дифференциальное и интегральное исчисления. Ряды играют большую роль в экономике, инженерии, геодезии, химии, физике, астрономии, биологии, архитектуре, эстетике, теории музыки, криптографии и т.д.

2. Учебные цели:

- получение навыков нахождения определенного интеграла.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **знать:**

- определение определенного интеграла;
- свойства и формулы для нахождения определенного интеграла; - основные методы интегрирования.

Для формирования профессиональных компетенций обучающийся должен **владеть и уметь:**

- находить первообразные функции;
- использовать таблицу основных интегралов для нахождения интеграла
- решать некоторые задачи геометрии и физики с помощью определенного интеграла

и овладеть следующими компетенциями: способность и готовность эксплуатировать современную аппаратуру и оборудование для выполнения научно-исследовательских полевых и лабораторных биологических работ, способность и готовность осуществлять выбор технологического процесса, необходимого технологического оборудования, с соблюдением требований международных стандартов.

3. Материалы для самоподготовки к освоению данной темы: Вопросы для самоподготовки:

1. Степенной ряд и его область сходимости.
2. Свойства степенных рядов.
3. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.
4. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды.
5. Приложения степенных рядов к приближённым вычислениям.
6. Степенные ряды в комплексной области. Круг сходимости ряда.
7. Показательная и тригонометрическая функции комплексной переменной.
8. Логарифмическая функция.
9. Тригонометрические ряды.
10. Комплексная форма ряда Фурье.
11. Разложение функции в ряд Фурье.

4. Вид занятия: практическое занятие.

5. Продолжительность занятия: 3 часа

На изучение данной темы, отведено 4 академических часа по рабочей программе дисциплины «Высшая математика» направления подготовки 30.05.02 Медицинская биофизика.

6. Оснащение:

6.1. Дидактический материал: таблицы, плакаты, интерактивная доска, компьютерная программа.

6.2. ТСО: Мультимедийный проектор, ноутбук, компьютеры.

7. Содержание занятия:

7.1. Контроль исходного уровня знаний обучающихся с применением тестов.

7.2. Разбор с преподавателем узловых вопросов, необходимых для освоения темы данного занятия.

7.3. Демонстрация преподавателем методики практических приемов по данной теме.

7.4. Самостоятельная работа обучающихся под контролем преподавателя. Типовые задачи.

Решить типовые задачи.

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. № 31-49 (с. 430-431).

7.5. Контроль конечного уровня усвоения темы:

Подготовка к выполнению практических приѐмов по теме занятия.

1. Указать ряд Фурье

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sin nx$; б) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ a_n \cos nx + b_n \sin nx$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ \ x^n + \cos nx$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ a_n x^n + b_n y^n$

2. По какой формуле определяются коэффициенты ряда Фурье для четной функции?

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$; б) $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$; в) $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$; д) $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

Материалы для контроля усвоения темы: набор тестовых заданий. д)

а) a

г) b

3. Для разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной функции, заданной на отрезке [0, l] необходимо продолжить функцию:

а) на [-l ,0]; б) на [-2l ,0]; в) на всю ось с периодом l ; г) на [-l ,0] и на всю ось с периодом 2l ; г) на всю ось с периодом 2l ;

Место проведения самоподготовки: читальный зал, учебная комната для самостоятельной работы студентов, компьютерный класс.

Учебно-исследовательская работа обучающихся по данной теме (проводится в учебное время): работа с основной и дополнительной литературой.

8. Литература:

1. Высшая математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. Баврин, И. И.- 5-е изд., стер. - М. : Академия, 2005. - 611 с. глава 8, пар. 8.3-8.6 (с. 395-427).

Литература для обучающихся (в т.ч. адреса электронных ресурсов)

Основная литература

п / №	Наименование	Автор (ы)	Год, место издания	Кол-во экземпляров в биб-лиотеке
1	2	3	4	5
1.	Основы высшей математики: учебник	Лобоцкая, Н. Л.	- 2-е изд., перераб. и доп., стереотипное издание. Перепечатка с издания 1978 г. - М. : Альянс, 2015. - 479 с.	1144
2.	Математический анализ: учебник : в 2-х ч.	В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова.	3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект : Изд-во МГУ, 2007 - . - (Классический университетский учебник). Ч. 1. - 2007. - 660 с	25

Дополнительная литература

п/ №	Наименование	Автор (ы)	Год, место издания	Кол-во экземпляров в библиотеке
1	2	3	4	5
1	Основы высшей математики и статистики: учебник для студ. мед. и фармац. вузов и факультетов	Морозов Ю.В.	М. : Медицина, 2004. - 232 с.	30
2	Задачи по высшей математике,	Шапкин А.С.	4-е изд. - М. :	30

	теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями [Текст]: учеб. пособие		Дашков и К, 2007. - 431 с.	
4	Электронно-библиотечная система «Лань»			http:// e.lanbook.com
5	Электронно-библиотечная система «Консультант студента» для ВПО			www.studmedlib.ru
6	База данных «Электронная учебная библиотека»			http:// library.bashgmu.ru

1. https://www.medicinform.net/ (Медицинская информационная сеть)

2. https://www.studentlibrary.ru/ (Консультант студента)